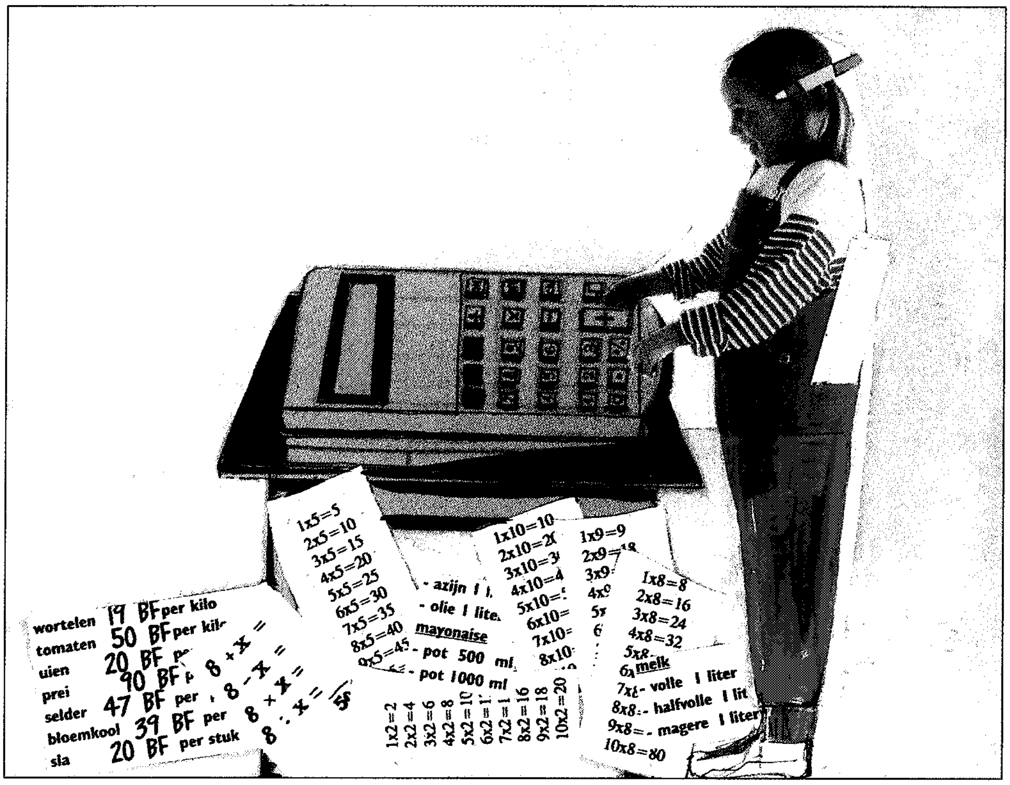


BEWERKINGEN

Toelichtingen

VLAAMS VERBOND VAN HET KATHOLIEK BASISONDERWIJS 2002

BEWERKINGEN

Toelichtingen

VLAAMS VERBOND VAN HET KATHOLIEK BASISONDERWIJS 2002

INHOUD

TEN GELEIDE

Het leerplan Wiskunde deelt de doelen en leerinhouden in vijf groepen in: getallenkennis, bewerkingen, meten en metend rekenen, meetkunde en domeinoverschrijdende doelstellingen.

Bij elk domein publiceert het VVKBaO 'Toelichtingen'. Dit deel bevat de 'Toelichtingen bij het leerplan wiskunde: bewerkingen'. Het reikt concrete suggesties en voorbeelden aan om in de klas en in de school aan de doelen van bewerkingen te werken. Het beschrijft wat breedvoeriger de aspecten van bewerkingen en onderbouwt en illustreert de nieuwe visie van goed wiskundeonderwijs.

De toelichtingen volgen de indeling van het leerplan. Zo verwijst '2.2.1 Van situaties naar bewerkingen en omgekeerd' naar dezelfde rubriek in het leerplan.

In de linkerkantlijn staat de korte inhoud en het nummer van het leerplandoel vermeld waar de activiteit een bijdrage toe levert.

Per doelstelling volgen suggesties om aan dat specifieke doel te werken, vanaf het begin tot aan het einde van de leerlijn. De verticale samenhang is van groot belang voor een goede begripsvorming en voor het ontwikkelen van probleemoplossende vaardigheden en goede attitudes binnen het vak wiskunde. Bij elke suggestie vind je concrete voorbeelden. Die zijn cursief gedrukt.
Vaak vind je naast een voorbeeld een verwijzing naar een bepaald leerjaar. De oefening is dan specifiek voor dat leerjaar bedoeld. Staat er 'vanaf tweede leerjaar' dan betekent dit dat leerlingen vanaf het tweede leerjaar deze oefening kunnen maken, maar dat ze ook in hogere leerjaren aan bod kan komen.

Soms merk je in de linkerkantlijn ook doelen uit andere domeinen: bijvoorbeeld een doel rond metend rekenen (MR). Dat geeft aan dat je al werkend aan bewerkingen, tegelijk ook doelen uit andere domeinen kan meenemen. Als je een probleem of een situatie wiskundig benadert, werk je immers vaak aan de horizontale samenhang tussen de doelen uit verschillende domeinen. De processen die leerlingen doorlopen zijn niet zo streng in hokjes te plaatsen. Soms zijn er ook domeinoverschrijdende kennis, vaardigheden en attitudes in het spel. Ook die staan in de kantlijn aangegeven.

In de begrippenlijst achteraan tref je een omschrijving aan van elk begrip en de wiskundige terminologie die in dit leerdomein voorkomt.

Hoe kun je van de 'Toelichtingen' gebruik maken om binnen je klas je onderwijs te organiseren?

- Als leerkrachten in de praktijk of als student in de lerarenopleiding kan je met deze toelichtingen het leerplan concretiseren.

- Je ontdekt een horizontale samenhang door de verwijzingen naar andere domeinen.

- Je krijgt meer zicht op de verticale samenhang.
  - Je weet wat je aan voorkennis bij je leerlingen mag verwachten.
  - Je kunt stappen terugzetten in de leerlijn wanneer bij sommige leerlingen leerproblemen opduiken.
  - Je begrijpt waaraan je collega's in de daaropvolgende leerjaren nog dienen te werken.

- Je vindt praktische voorbeelden bij elke doelstelling. Misschien was je precies op zoek naar meer praktische voorbeelden om de nieuwe visie van goed wiskundeonderwijs in jouw klas en school concreet te maken. Die praktische voorbeelden kunnen je ook helpen om goede toetsvragen op te stellen; zeker wanneer je werkt met een doelstellingenrapport.

- In de begrippenlijst vind je precieze omschrijvingen van de inhoud van een begrip of term. Niet om ze door de leerlingen als definitie uit het hoofd te laten leren, wel om ze zuiver te omlijnen voor de leerkracht.

We hopen met deze publicatie alle leerkrachten die goed wiskundeonderwijs willen verzorgen, een dienst te bewijzen.

Deze publicatie werd voorbereid door de leden van de werkgroep 'Toelichtingen bij bewerkingen': André Van Landeghem, Eugeen De Varé, Jef Stappaerts, Raf Feys en Jos Peters. We danken hen voor hun medewerking. Onze dank gaat ook naar hen die bereid waren de ontwerpteksten te lezen en van commentaar te voorzien.

Brussel, januari 2002

Gaby Tersago, Antoine Lievens en Marleen Duerloo

2 BEWERKINGEN

2.1 INLEIDING

Zeven rubrieken

De doelen en leerinhouden van het leerdomein bewerkingen zijn onder zeven grote rubrieken verdeeld. Hieronder vind je een korte omschrijving van deze rubrieken.

Van situaties naar bewerkingen en omgekeerd

Kinderen moeten het verband leren zien tussen het leergebied wiskunde en de realiteit waaruit de wiskunde groeit en waarop ze van toepassing is. Dit betekent dat je concrete situaties in verband brengt met rekenkundige bewerkingen en dat je aan rekenkundige bewerkingen betekenisvolle situaties kan koppelen. Men noemt dit ook een situatie 'verwiskundigen'. Bij het verwiskundigen van een situatie treedt er steeds een zekere verarming op. Er gaat informatie verloren.

Hoeveel bananen heeft deze tros?
Bij het verwiskundigen van deze situatie herleid je een banaan tot een eenheid waarmee je telt. Dat de banaan krom en geel is, speelt geen rol bij het bepalen van het aantal. Deze niet-essentiële informatie gaat bij het verwiskundigen verloren.

Het kan echter ook gebeuren dat essentiële informatie verloren gaat.

De leerlingen van het derde en het vierde leerjaar gaan naar het toneel. Op één bus mogen maximaal 30 personen. Hoeveel bussen moet de directeur bestellen?
Jan en Inge berekenen eerst het aantal kinderen in de tweede graad: "Er zijn een vijf klassen met elk 23 kinderen...dat zijn 115 kinderen."
Bij de berekening loopt het echter mis. Ze rekenen uit: 115 : 30 = 3,83 en antwoorden: "We bestellen 3,83 bussen."
Hier is duidelijk dat het 'verarmen' van het probleem door met de getallen een bewerking te maken leidt tot een foute oplossing omdat Jan en Inge bij het verwiskundigen de relatie tussen hun rekenwerk en de situatie 'verloren' zijn.

'Verwiskundigen' begint in de kleuterklas waar de kleuters een aantal rekenhandelingen uitvoeren en verwoorden. Hiermee krijgen de kleuters een belangrijke aanzet waarop je in de lagere school voortbouwt.

Inzicht in de eigenschappen van en de relaties tussen bewerkingen

De plaats en de volgorde van getallen en bewerkingen in een formule speelt soms een rol en soms niet. Soms is het mogelijk om de getallen in een formule op te splitsen, te vermeerderen of te verminderen zonder dat het resultaat van de bewerkingen wijzigt.

Hoofdrekenen

Eerst worden de doelen gegroepeerd naar de soort getallen (natuurlijke getallen, breuken, percenten en kommagetallen). Voor elke soort getallen wordt er dan nog een onderverdeling gemaakt volgens de bewerkingen (optellen, aftrekken, vermenigvuldigen en delen).
Naast het paraat kennen van een aantal bewerkingen en het kunnen uitvoeren van een aantal bewerkingen met behulp van een standaardprocedure vormt het ontwikkelen van flexibele en doelmatige oplossingsmethodes een belangrijk streefdoel in de lagere school.

Schattend rekenen

Naast hoofdrekenen, cijferen en rekenen met een rekenmachine is het schattend rekenen een veel gebruikte rekenwijze die een belangrijke plaats inneemt dit leerplan. Je zet schattend rekenen aan vanaf het tweede leerjaar.

Cijferen

De doelen zijn gegroepeerd volgens de bewerking (optellen, aftrekken, vermenigvuldigen en delen). Vanaf het tweede leerjaar laten we leerlingen ervaren dat de keuze van een passende rekenwijze (cijferen, hoofdrekenen of schattend rekenen en vanaf het vierde leerjaar de zakrekenmachine gebruiken) situatiegebonden is.
Leerlingen moeten niet alleen een algoritme kunnen toepassen als een automatische technische handeling, maar ze moeten ook inzichtelijk het algoritme kunnen begrijpen en uitleggen.

De zakrekenmachine gebruiken

In het dagelijks leven biedt de zakrekenmachine een hulp om bewerkingen uit te voeren. Het gebruik van de zakrekenmachine vervangt echter het hoofd-, cijfer- en/of schattend rekenen niet.

Leerlingen uit de bovenbouw dienen met de zakrekenmachine te leren werken. Bovendien biedt dit hulpmiddel ook de mogelijkheid om inzichten te verwerven en om de eigenschappen van bewerkingen en relaties tussen getallen te onderzoeken.

Toepassingen

Betekenisvolle situaties die je kan verwiskundigen, zijn volgens een aantal criteria in te delen. Zo zijn er enkelvoudige vraagstukken (vraagstukken waarbij het toepassen van één enkele bewerking tot de oplossing leidt) en samengestelde vraagstukken (vraagstukken waarbij je meer dan één bewerking uitvoert om de oplossing te vinden) met natuurlijke getallen, breuken en kommagetallen. Daarnaast vormen de vraagstukken met verhoudingen (recht- en omgekeerd evenredige grootheden, mengen, inwisselen, ...) een belangrijk pakket in de lagere school. Een aantal specifieke vraagstukken zoals vraagstukken met gemiddelde en mediaan, problemen in verband met ongelijke verdeling en situaties met tarra, bruto en netto moeten de leerlingen op het einde van de lagere school kunnen oplossen.

2.2 DOELEN EN LEERINHOUDEN

2.2.1 VAN SITUATIES NAAR BEWERKINGEN EN OMGEKEERD

Rekenhandelingen uitvoeren en ze verwoorden
B1

De leefwereld van de kinderen vormt het uitgangspunt voor het verkennen van diverse begrippen in het kader van het uitvoeren van bewerkingen.

Bewerkingen in de kleuterklas

In de kleuterklas legt de kleuterleidster de basis voor bewerkingen door kleuters materialen te laten manipuleren, door kleuters rekenhandelingen te laten uitvoeren en door hen zo nauwkeurig mogelijk deze handelingen te laten verwoorden.

Rekenhandelingen verwoorden

Bij het verwoorden van rekenhandelingen hanteren de leerkracht en de kinderen een uitgebreid arsenaal wiskundige begrippen. Daarvan moeten kleuters reeds heel wat termen kennen en beheersen. Een aantal termen staat opgesomd in doel B1.

Als leerkracht dien je eerst en vooral rekenhandelingen zelf nauwkeurig te verwoorden. Dan zullen kleuters de handelingen die ze uitvoeren of zien met de juiste wiskundige termen kunnen omschrijven. Daarnaast stimuleer je het gebruik van deze termen.

Met telbare hoeveelheden als snoepjes, knopen enzovoort kan je rekenhandelingen uitvoeren als: bijdoen, afdoen, verdelen, halveren, verdubbelen, ... Deze handelingen passen eerder in de leerdomeinen getallenkennis en bewerkingen.

- *Juf Katrien hoort Bert en Karen ruzie maken in de winkelhoek. "Jij hebt meer kroonkurken dan ik", zegt Bert, waarop Karen reageert: "Neen, wij hebben er beiden evenveel." Juf Katrien legt samen met beide kleuters de kroonkurken op twee corresponderende rijen. "Ik heb gelijk," zegt Bert, "jij hebt er twee meer". Nu telt Karen beide hoeveelheden en zegt: "Juist!"*

- *Zara is jarig en heeft snoepjes meegebracht. "Hoe verdeel je deze snoepjes eerlijk?", vraagt meester Joost. Sigrid kijkt naar de snoepjes maar weet het niet. Gert zegt: "We geven elk kind een snoepje en dan geven we weer elk kind een snoepje". Sigrid knikt. Meester Joost ziet dat voor Sigrid het begrip 'eerlijk delen' wat duidelijker is geworden.*

Je kan diezelfde rekenhandelingen uitvoeren met niet-telbare hoeveelheden zoals een stuk cake, een hoopje zand, een fles water, een blad papier, een stuk touw, een bal klei... Dit situeert zich eerder in het leerdomein meten en metend rekenen.

"Mijn papa zegt dat mijn broer wel dubbel zo dik is," zegt Aaike. "Dubbel zo dik, dan ben jij wel heel dik, Aaike," zegt juf Fatima. "Neen juf, juist omgekeerd, mijn broer is dubbel zo dik als ik," reageert Aaike. "Juist, maar dat is niet zo eenvoudig. Wat betekent eigenlijk dubbel zo dik of dubbel zo veel?"

"Dat betekent dat je iets twee keer neemt...dubbel zoveel snoepjes is voor elk snoepje nog één nemen..."
Juf Fatima ervaart dat Aaike het begrip 'het dubbele nemen' goed beheerst maar dat het verwoorden niet zo eenvoudig is.

Als kleuters in de constructiehoek actief zijn, voeren ze zowel rekenhandelingen uit met telbare als met niet-telbare hoeveelheden.

Begrippen en situaties

De invulling van begrippen is uiteraard situatiegebonden. Bekijk bijvoorbeeld het begrip 'de helft nemen' in volgende situaties:

- *Verdeel deze taart in twee gelijke helften.*
- *Neem elk de helft van het aantal penselen dat in deze pot zit.*
- *Verdeel eerlijk deze snoepjes onder jullie tweeën.*
- *Scheur dat stuk papier in twee gelijke delen. Met één deel heb je meer dan genoeg om dat geschenkje in te pakken.*

Materiaalaanbod en rekenhandelingen

Een rijk uitgebouwd materiaalaanbod geeft kleuters kansen om zelf rekenhandelingen uit te voeren en passend te verwoorden.

- *Een goed uitgeruste bouwhoek waarin vrachtwagens aan en af rijden om te laden en te lossen. (bijdoen, wegdoen,...)*
- *Gevarieerde recipiënten aan de zand- en watertafel leiden tot: vermeerderen, verminderen, een aantal keer iets nemen,...*
- *Een aantal miniatuurdieren in de boerderij die je kan verdelen, rangschikken, ...*

Gerichte activiteiten

Daarnaast organiseert de leerkracht bewust bepaalde activiteiten om een aantal rekenhandelingen te laten ervaren.

De combinatie van het geschikt materiaalgebruik met het stimuleren van allerlei denkprocessen bij kleuters vormen een stevige voedingsbodem voor het rekenen in de lagere school.

- *Vijfjarigen spelen ganzenbord met twee dobbelstenen. Op elke dobbelsteen staan de aantallen: niets, één, twee en drie. Dat kan je uitbreiden naar grotere aantallen naargelang de mogelijkheden van de kleuters.*

- *Om 'winkeltje' te spelen krijgen vierjarigen losse 'centjes' in de portemonnee: knopen, fiches, geldstukjes van 1 'euro'... Tijdens het kopen en verkopen oefenen ze daarmee tellen.*

- *Vijfjarigen krijgen 'briefjesgeld'. Dat zijn briefjes waarop zowel het getalbeeld als het cijfer genoteerd staan. Met dit 'geld' komen de bewerkingen aan bod. Stel dat een kleuter iets koopt van 4 'euro' en het briefje van 4 'euro' al gebruikt heeft. De kleuter kan dan betalen met een briefje van 3 'euro' samen met een briefje van 1 'euro' of geeft een briefje van 5 'euro' en krijgt 1 'euro' terug.*

- *Een spelletje met kaarten en een dobbelsteen voor vier kleuters. Elke kleuter krijgt de speelkaarten van 1 tot 6 (of meer) van één bepaalde soort: de ene kleuter de ruiten, de anderen de harten... Elke kleuter legt zijn kaarten op een rijtje voor zich op tafel. Om de beurt gooien de kleuters de dobbelstenen. Als de dobbelsteen 'vijf'* *zegt, mag de kleuter de kaart met 'vijf' omdraaien. Wie eerst alle kaarten omgedraaid heeft, wint.*

- *Een variant op dit spel verhoogt de moeilijkheidsgraad en laat het splitsen aan bod komen. Als de dobbelsteen 'vijf' zegt, heeft de kleuter de keuze: hij kan de 'vijf' omdraaien, maar ook 'vier' en 'een' of 'drie' en 'twee'.*

- *Een spelletje in de zandtafel voor een klein groepje kleuters. Elke kleuter neemt zes (of meer) knopen van een bepaalde kleur. De leerkracht verstopt alle knopen in de zandtafel. Dan gaan de kleuters op zoek naar de knopen van hun eigen kleur. Telkens ze een knoop te pakken hebben, vertellen ze hoeveel ze er al gevonden hebben en hoeveel ze er nog moeten zoeken. Dit oefent het splitsen. Wie heeft als eerst al zijn knopen gevonden?*

Eerste leerjaar

In het eerste leerjaar moeten leerlingen in eenvoudige situaties rekenhandelingen kunnen uitvoeren en passend verwoorden met de nodige rekentaal.

Rol van de leerkracht

De sturing door de leerkracht zal toenemen in vergelijking met de kleuterklas, maar leerlingen moeten uitgebreid kansen blijven krijgen om met materialen evenveel te maken, bij te doen, weg te doen, de helft te nemen, te verdubbelen, enzovoort.
Zulke handelingen mogen geen routinehandelingen worden waarbij er nog maar weinig denken aan te pas komt

Van het concrete naar het abstracte

Materialen of schema's kunnen ook een uitgangspunt vormen voor rekenhandelingen. Zo kunnen kinderen aanstippen wat meer is, schrappen wat weg mag, een streep trekken waar de helft ongeveer is, kleuren wat een gelijke vorm heeft, enzovoort.
De denkoperatie blijft centraal staan en de rekenhandelingen verschuiven langzaam van het concrete naar meer abstracte denkoperaties.

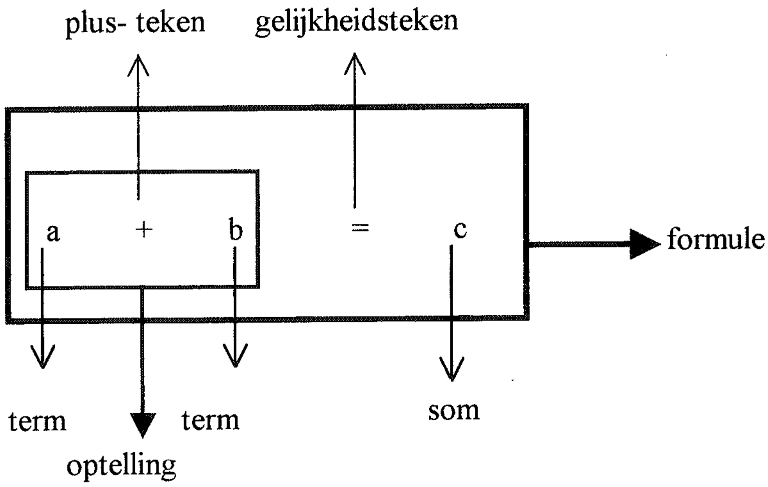
Tweede leerjaar

Verdiep dit doel verder in het tweede leerjaar. Dit is gemakkelijk te realiseren door blijvend aandacht te hebben voor het uitvoeren en verwoorden van rekenhandelingen bij allerhande activiteiten die zich niet alleen situeren in de rekenlessen. Denk maar aan eerlijk verdelen bij een 'jarige in de klas', pannenkoeken eten 'met Lichtmis', 'per twee in de rij staan', enzovoort.

Van situatie naar formule
B2a

Het omzetten van eenvoudige situaties in formules beschrijft men soms als het 'verwiskundigen van situaties' (zie ook inleiding bij bewerkingen). Dit verwiskundigen gebeurt vanaf het eerste leerjaar door het omzetten van de relatie(s) tussen de numerieke gegevens uit een opgave in een formule. Daarbij gebruiken de leerlingen wiskundige termen als getallen, optellen, gelijkheidsteken, enzovoort.

Een schema verduidelijkt de term 'formule':



Eerste leerjaar

- *De leerling zoekt de passende formule bij het verhaal:*
  Jan heeft vijf auto's. Hij krijgt er nog drie bij.
  Hoeveel auto's heeft hij nu?

- *De kinderen spelen autobus in de klas. Griet is de bestuurder en de 'inzittenden' vormen samen met Griet een lange sliert. Meester Luc heeft enkele haltes in de klas voorzien. Bij elke halte geeft hij een opdracht als: "Er stappen drie personen uit en nadien stappen er vijf personen op. Hoeveel personen zitten nog op de bus van Griet?"*
  De leerlingen kunnen met rekenstaven de bewerkingen handelend uitvoeren op een twintigveld (eerste twee rijen van een honderdveld) door staven één te laten aaneensluiten voor de optellingen of door staven één weg te nemen bij de aftrekkingen.
  Nadien hangt meester Luc kaartjes op de stoelen in de vorm van

  $\boxed{-3}$ $\boxed{+4}$

  en de leerlingen verwoorden de betekenis van deze 'formules'.

Sleutelwoordstrategie

Kinderen passen bij het omzetten van situaties in formules vlug een 'sleutelwoordstrategie' toe. Het is namelijk erg verleidelijk om aan een woord als 'verliezen' de aftrekking te koppelen, of aan het begrip 'aantal keer' de bewerking 'x'. Zo kunnen ze situaties op een foute manier verwiskundigen. Om dit te vermijden kunnen kinderen deze situaties naspelen, navertellen, enzovoort.
Het opgavenaanbod dient hierop in te spelen. De 'sleutelwoorden' leiden niet altijd tot de hieraan gekoppelde bewerking.

Eerste leerjaar

- *Billy verloor deze morgen 5 knikkers. Nu heeft hij er nog 4 op zak.*

Hoeveel knikkers had hij gisteren?

Tweede leerjaar

- *In hotel 'Zeezicht' kan je voor het ontbijt kiezen tussen drie soorten broodjes en vier soorten beleg. Hoeveel verschillende broodjes kan je maken?*

Schema's
B2b

Om bewerkingen te visualiseren zijn bepaalde schema's zeker zinvol te gebruiken.

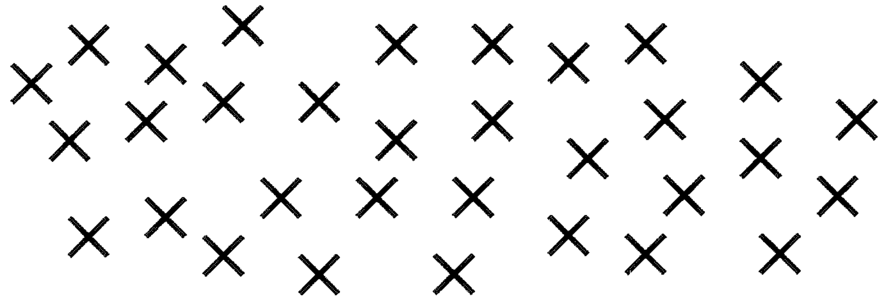
Als je leerlingen een probleemstelling voorschotelt, geef hen dan een kladblaadje om hen de kans te geven zelf schema's te bedenken. Wanneer leerlingen de probleemstelling oplossen zonder gebruik te maken van één of ander schema dan kan je daar als leerkracht niets tegen inbrengen. Maar als bepaalde leerlingen niet kunnen of niet durven beginnen, suggereer dan om één of ander schema als denkondersteunend middel te gebruiken. Leer daarom bepaalde schema's aan en oefen ze in.

Eerste leerjaar

- *Er zijn acht kippen in het kippenhok. Twee worden geslacht. Hoeveel blijven er nog over?*
  Maak bij dit verhaal een tekening die je kan helpen om de oplossing te vinden.

Derde leerjaar

- *In het derde leerjaar zitten 32 leerlingen.*
  Hoe kan je die leerlingen verdelen over 2 klassen?



Welke bewerking kun je hierbij noteren?
32 : 2
1/2 van 32
32 - 8 - 8
32 : 4 x 2

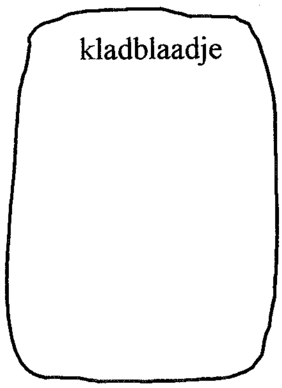
Kladblaadje

Het gebruik van een 'kladblaadje' bij probleemstellingen vormt een interessant hulpmiddel zowel voor de leerkracht als voor de leerling. Evalueer de notities op het kladblad altijd positief. Zo kan je op wiskundige fouten wijzen als die op het kladblad verschijnen maar betrek je die fouten niet in de evaluatie.

30 + 5 = 35 - 7 = 28

Vijfde leerjaar

Jan ziet een aanbieding in de krant: 1 cd voor 6 euro, 2 cd's voor 10 euro, 3 cd's voor 14 euro, 4 cd's voor 18 euro. Jan wil zo veel mogelijk cd's kopen met zijn spaargeld van 30 euro.
Hoe koopt hij het voordeligst?



Voordelen

Voordelen voor de leerling:
- hij noteert zelf wat voor hem belangrijk is
- het ondersteunt zijn denkproces
- wat op het kladblaadje staat, helpt om de aanpak achteraf te verwoorden

Voordelen voor de leerkracht:
- krijgt beter zicht op het denkproces
- kan het niveau van rekenwerk beter inschatten
- helpt om het niveau van probleemoplossende vaardigheden te evalueren

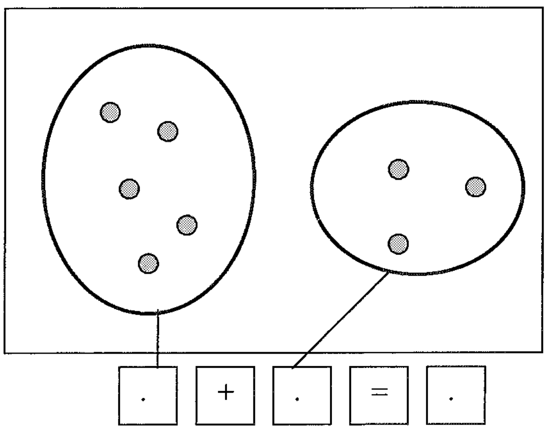
Modellen voor bewerkingen

Heel wat situaties kunnen visueel ondersteund worden door schema's en modellen. We zetten de belangrijkste modellen voor de bewerkingen op een rijtje.

Optelling

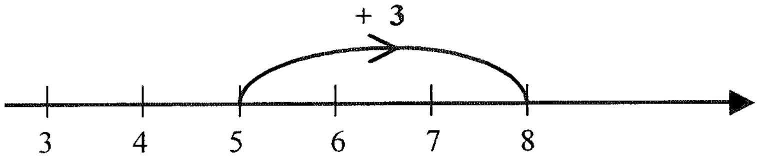
Modellen voor de optelling

- Verzamelingenmodel



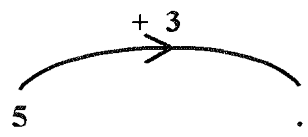
Hoeveel is vijf plus drie?

- Getallenas



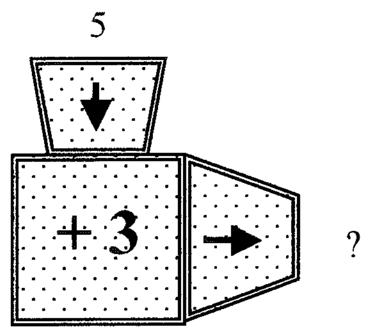
Hoeveel is vijf plus drie?

- Relatiepijl



Hoeveel is vijf plus drie?

- Machientje

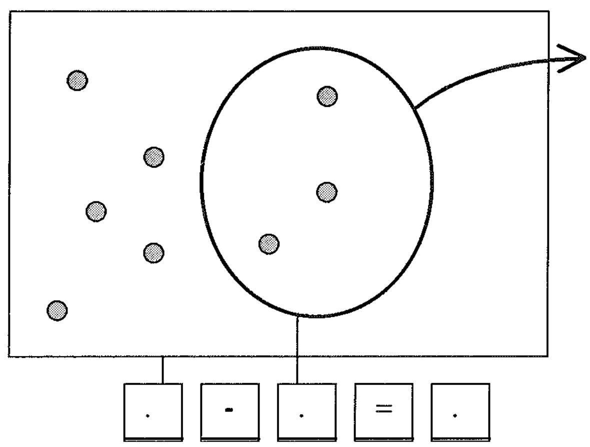


Wat doet het machientje? Stop er drie in, welk getal komt er dan uit?

Aftrekking

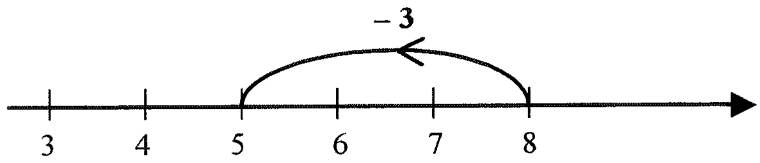
Modellen voor de aftrekking

- Verzamelingenmodel



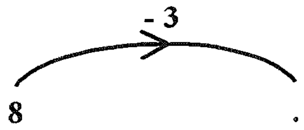
Hoeveel is acht min drie?

- Getallenas



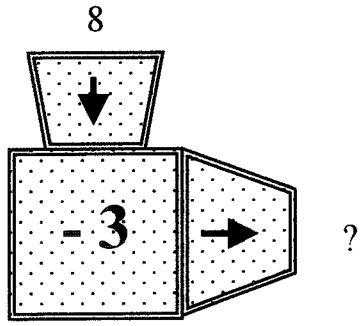
Hoeveel is acht min drie?

- Relatiepijl



Hoeveel is acht min drie?

- Machientje

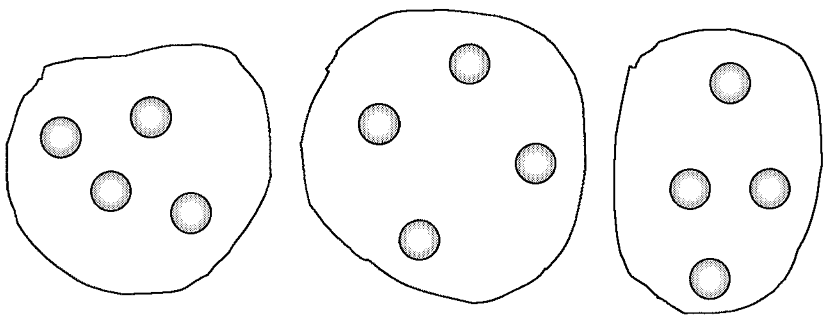


Wat doet het machientje? Stop er acht in, welk getal komt er dan uit?

Vermenigvuldiging

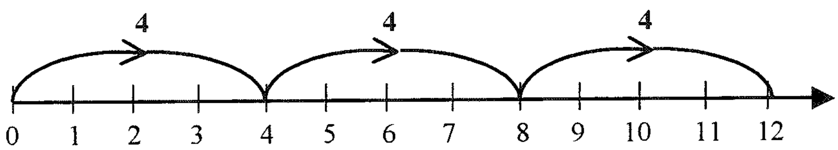
Modellen voor de vermenigvuldiging

- Groepeermodel met verzamelingen

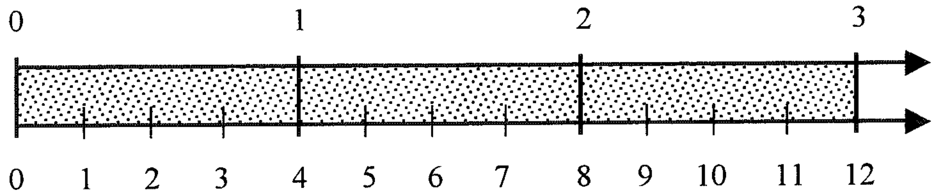


Hoeveel is 3 maal 4?

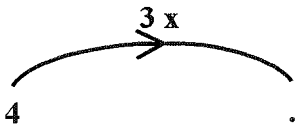
- Getallenas



Hoeveel is 3 maal 4?

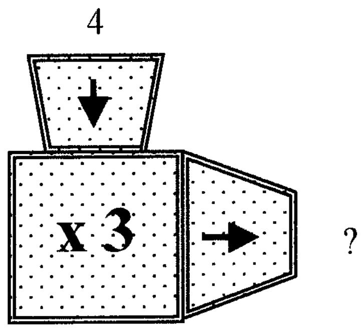


- Relatiepijl



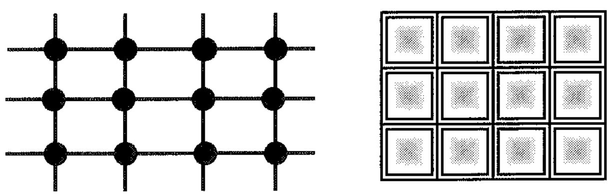
Hoeveel is 3 maal 4?

- Machientje



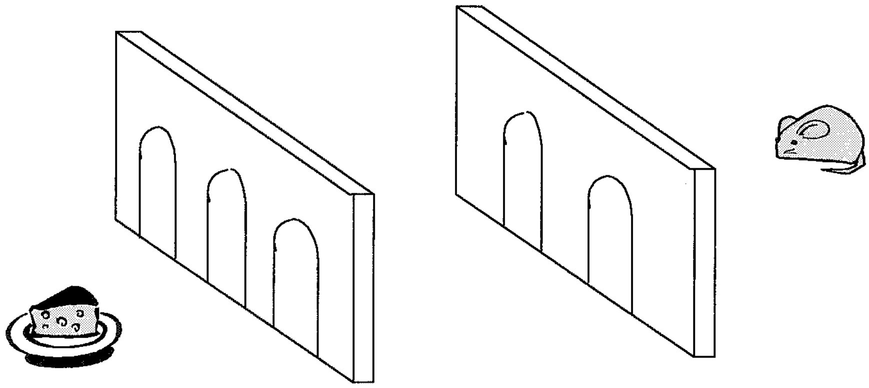
Welk getal komt er uit als je 3 in het machientje stopt?

- Roostermodel / rechthoekmodel



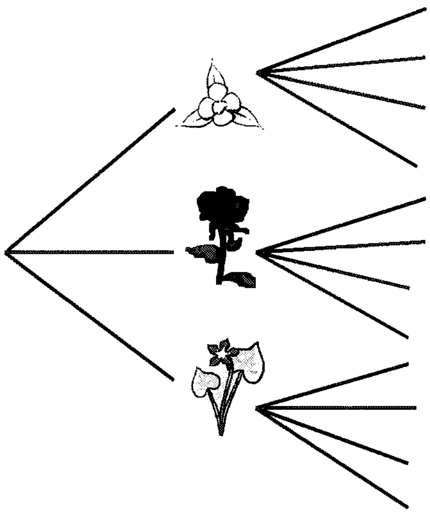
Hoeveel knooppunten vind je als drie lijnen vier andere lijnen snijden?

- Wegenmodel



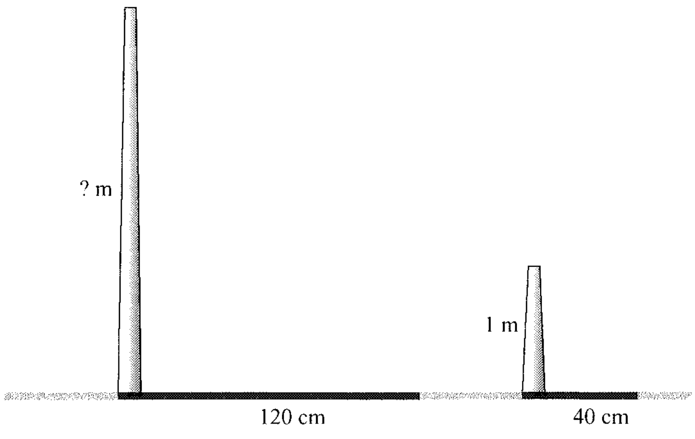
Hoeveel verschillende wegen kan de muis volgen?

- Boomdiagram



Als je drie soorten bloemen hebt en elke bloem kan vier kleuren hebben, hoeveel verschillende bloemen kun je dan tekenen?

- Verhoudingen

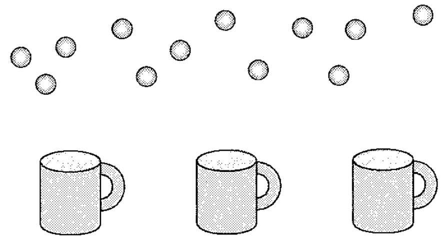


Kijk goed naar de tekening, hoe lang is de grote paal?

Deling

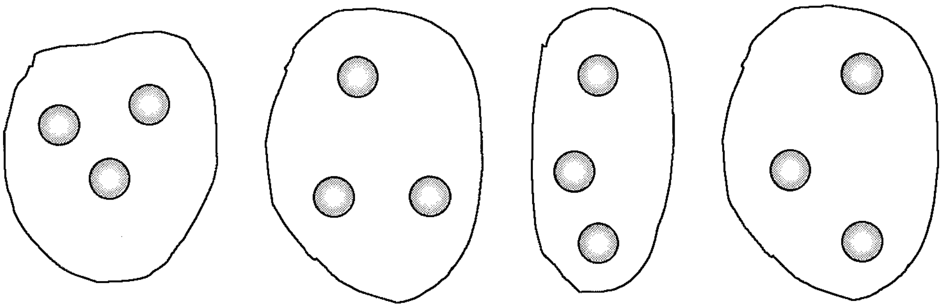
Modellen voor de deling

- Verdelen (eerlijk delen, gelijke groepjes maken,...)



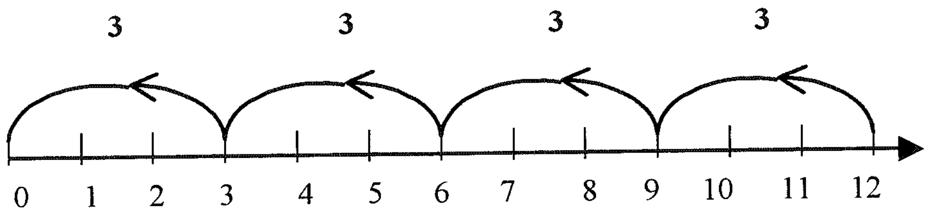
Hoeveel is 12 gedeeld door 3?

- Verhoudingen



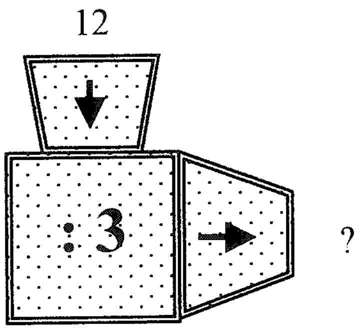
Hoeveel keer kan 3 in 12?

- Getallenas



Hoeveel sprongen van 3 terug kan je maken vanaf 12?

- Machientje



Welk getal komt er uit als je 12 in het machientje stopt?

Van formule naar situatie
B2c

Het is voor leerlingen niet zo eenvoudig om situaties bij formules te bedenken. Het woord 'formule' moet je hier in de breedste zin opvatten.

Schrijf op het bord:

$$60^{\text{sec.}} \neq 1^{\text{min.}}$$

(reclameboodschap van 'Orange', De Standaard, 8 september 1999)

rekenkundig gelijk.
Andere kinderen zullen misschien opmerken dat deze 'formule' een tijd geleden in de krant stond.

Een formule is de verwiskundiging van een betekenisvolle situatie. Zo betekent de formule '60 sec. $\neq$ 1 min.' in het voorbeeld: "Je betaalt bij Orange per seconde. De concurrenten ronden af naar de volgende minuut." en vormt ze de verwiskundiging van deze reclameboodschap. Deze formulering is niet correct in de puur wiskundige betekenis. Maar niemand zal betwisten dat het kunnen lezen, interpreteren en begrijpen van de reclameboodschap die achter de formule zit een zinvolle activiteit is en een mooi probleem vormt om met kinderen te bespreken.

Eerste leerjaar

Juf Mia schrijft op het bord: 5 < 7
Terwijl ze schrijft zegt ze niets, anders verklapt ze de verwoording al.
"Wie kan hier een verhaaltje bij verzinnen?"

Tweede leerjaar

- *Op het bord: 80 : 30 quotiënt 2 rest 20*
  "Verzin bij deze opgave een passend verhaal. Werk samen met je buur."

- *"Een raadseltje: zes plus zes is één. Wie kan daar iets bij verzinnen?"*
  "Zes eieren en zes eieren vullen samen één doos van twaalf, dus zes en zes is één," zegt Michaël.
  "Een ander raadseltje: zestig en zestig is twee."
  "Gaat het over minuten, meester?" vraagt Lien. Deze vraag zet de andere leerlingen op de goede weg.
  Toon komt met een heel andere oplossing: "In één dubbeldekker kunnen zestig personen."

Vanaf vierde leerjaar

- *"Wie kent dit?"*

$$^{24}/_{24}$$

Lise is er vlug bij: "Dat zie je bij benzinestations staan."
"Wat is de betekenis?," vraagt de juf.

Vijfde leerjaar

- *Wat betekent ' 98 %' in de reclameboodschap:*
  "Proximus heeft een bedekking in België van 98 %"?
  "Dat betekent dat je bijna overal met je GSM op het netwerk van Proximus kan bellen," zegt Erna.
  "En als er zou staan 50%?"
  Een mooi leergesprek volgt.

- *"Gisteren noteerde ik de getallen die op de benzinepomp staan:*

0	7	7,	4	1	€
0	5	6,	5	0	liter
0	0	1,	3	7	€/l

Wat is de betekenis van die getallen hier?
Wie kan me vertellen hoeveel ik eigenlijk heb betaald?"

Symbolen, notatiewijzen en conventies
B3

Introduceer pas symbolen, notatiewijzen en conventies in verband met bewerkingen met getallen wanneer leerlingen voldoende ervaring hebben opgedaan met de rekenhandelingen die daar aan voorafgaan of waarop zij gebaseerd zijn. Zo maakt elke leerling een leerproces door dat vertrekt van het herkennen van rekenhandelingen in concrete situaties om uiteindelijk tot abstracte bewerkingen te komen.

Bij de introductie van de optelling kan je kale bewerkingen als '2 + 3 = . ' niet zomaar aan leerlingen aanbieden.

Spreek eerst de ervaringskennis aan die leerlingen in de kleuterklas hebben opgebouwd bij het uitvoeren en verwoorden van rekenhandelingen als bijdoen, vermeerderen, erbij leggen, bijdenken,...

Laat nadien eenvoudige situaties omzetten in rekenverhalen naar de bewerking toe: "Je hebt twee, drie erbij is .?"
Deze omschrijving leidt tot een 'formule':
"Twee plus drie is vijf."
Breng dan de abstracte wiskundige vorm op het bord:
'2 + 3 = 5'

Symbolen, notatiewijzen en conventies leiden hier naar een abstracte wiskundige vorm: de formule.

Symbolen, notatiewijzen en conventies in verband met bewerkingen met getallen in verschillende situaties
B3a

Kinderen moeten symbolen, notatiewijzen en conventies in verband met bewerkingen met getallen in verschillende situaties kunnen gebruiken.

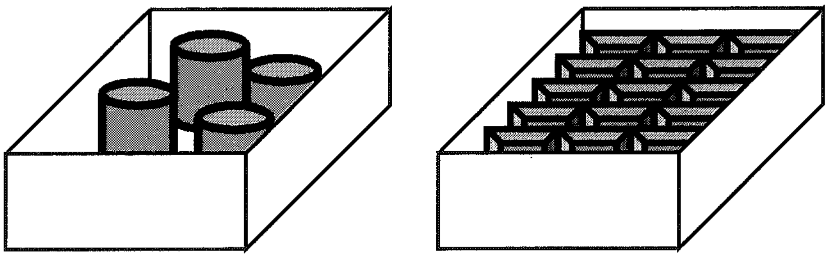
Ze gebruiken de formule 4+5 = 9 bij:

- *Een tekening waar 4 vogels op een eerste draad zitten en 5 vogels op een tweede draad.*

- *Het twintigveld waar vijf blokjes naast vier blokjes liggen.*

- *Een denkoefening: "De juf heeft in de ene hand vier snoepjes en in de andere hand vijf. Jullie kunnen ze niet zien, maar hoeveel snoepjes heeft de juf in beide handen samen? Vertel het met een bewerking met getallen."*

- *Je mag volgende tekens gebruiken: < , > en =*



Kijk enkel naar de grootte van de dozen:
grootte doos ... grootte doos 2
Nu kijken we naar het gewicht van de dozen:
gewicht doos 1 ... gewicht doos 2
Tel het aantal voorwerpen dat in elke doos zit:
aantal in doos 1 ... aantal in doos 2

Structuur van formules
Gebruik van termen
B3b

Het omzetten van een situatie naar een meer wiskundige vorm gebeurt meestal door één of meer formules te gebruiken.

In een eerste stap koppel je meestal de hoeveelheden uit de situatie aan (een) getal(len). Om de situatie in één of meer formules te vatten vertaal je de rekenhandeling(en) uit de situatie in één of meer bewerkingen. Het (de) passend(e) getal(len) samen met de passende bewerking(en) leiden tot de verwiskundiging van de situatie in (een) formule(s).

In het duivenhok van oom Saddam zitten in totaal 27 duiven. Acht duiven zijn helemaal wit. Hij verkoopt die witte duiven aan zijn beste vriend.
Hoeveel duiven heeft hij nog over?
De leerlingen verwiskundigen deze situatie tot de formule
27 - 8 = .

Als je enkel naar de aftrekking zelf kijkt in het voorbeeld, dan ben je de situatie van het duivenhok kwijt. Elk verwiskundigen van een situatie laat informatie verloren gaan, informatie die niet wiskundig interessant is. Zo spelen de kleur, de fitheid, de soort,... van de duiven geen rol bij de wiskundige oplossing, maar ze spelen zeker een rol bij de geschetste situatie van een verkoop.

Het is belangrijk om met leerlingen zo veel als mogelijk het verband te leggen van een situatie naar een formule en omgekeerd. Pas op die manier kunnen leerlingen de structuur van formules leren begrijpen en correct noteren. De formule komt als het ware tot leven als je ze terug in de situatie plaatst waaruit ze ontstaan is.

De aftrekking 27 - 8 = .

27 is de hoeveelheid waar je iets afneemt en deze 'starthoeveelheid' schrijf je altijd eerst.

Een minteken schrijf je altijd tussen twee hoeveelheden. Het vertelt dat je van de 'starthoeveelheid' de tweede hoeveelheid moet wegnemen of dat je het verschil tussen beide getallen moet zoeken.

Het tweede getal in een aftrekking vertelt hoeveel je moet wegnemen.

Er moet altijd een gelijkheidsteken staan. Dat vertelt dat je de bewerking hebt uitgevoerd en net erna schrijf je het resultaat van je denkwerk.

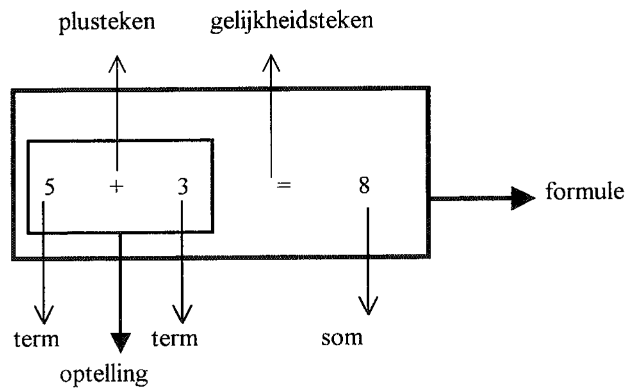
Nauwkeurig noteren is belangrijk. Zo moeten eerst en vooral getallen die bij de hoeveelheden horen juist geschreven zijn en op de juiste plaats staan. Daarnaast moeten ook symbolen die de rekenhandelingen wiskundig vertalen samen met het gelijkheidsteken hun precieze plaats krijgen.

Gebruik van termen
B3c

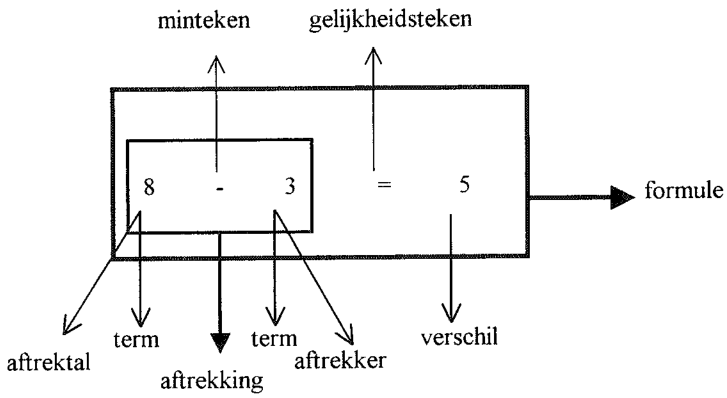
Hier vind je de termen die leerlingen moeten kennen in een bepaald leerjaar.
Als je als leerkracht bij de verwoording van formules telkens de juiste termen hanteert, zullen leerlingen zich die correcte verwoording langzaam eigen maken.

Hieronder geven we schematisch alle opgesomde termen weer.

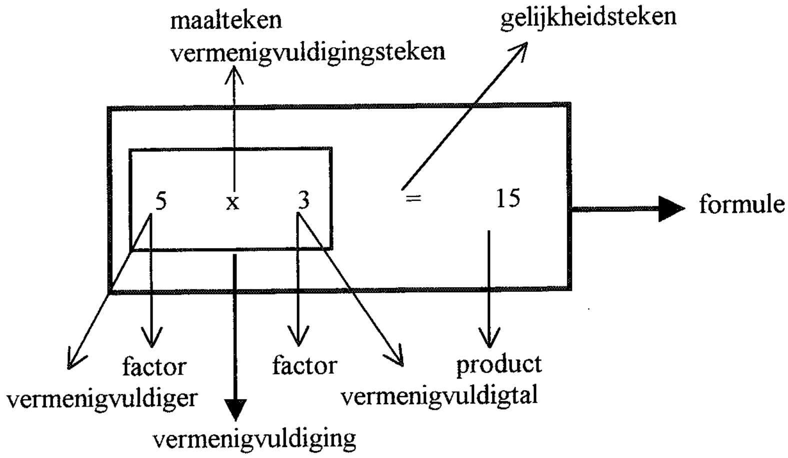
- Termen bij de optelling:



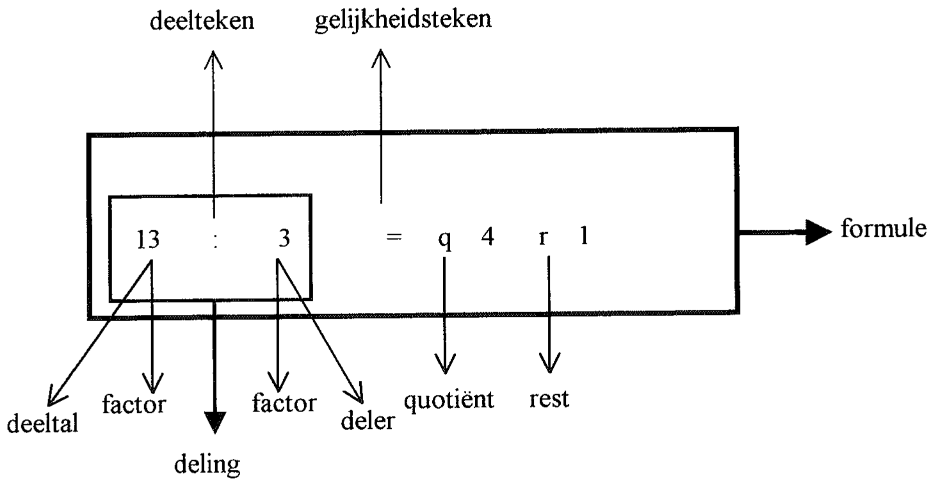
- Termen bij de aftrekking:



- Termen bij de vermenigvuldiging:



- Termen bij de deling:



Gebruik van symbolen **B3d**	Dezelfde bemerking als bij doel B3c geldt ook hier: Benoem en gebruik steeds de correcte termen en symbolen.

Merk op:
Verwoord + als 'plusteken' als het teken los van een formule staat en als 'plus' in de formule 2 + 3 = 5.

Analoog voor de andere bewerkingstekens.

Gebruik wiskundige symbolen zoveel mogelijk in 'formules' en zo weinig mogelijk in gewone teksten.
Dus niet: 'Jan + Sigrid' maar wel 'Jan en Sigrid'.

2.2.2 INZICHT IN DE EIGENSCHAPPEN VAN EN DE RELATIES TUSSEN BEWERKINGEN

Combinatie van bewerkingen en haakjes

Maak volgende oefeningen:

32 - 2 x 5 = .	*(32 - 2) x 5 = .*	*32 - (2 x 5) = .*
12 x 8 : 2 = .	*12 x (8 : 2) = .*	*(12 x 8) : 2 = .*
12 - 8 + 2 = .	*(12 - 8) + 2 = .*	*12 - (8 + 2) = .*

Bij deze opgaven combineer je verschillende bewerkingen. Er zijn oefeningen met en zonder haakjes.

Algemene afspraken

De volgende voorschriften zorgen ervoor dat je misverstanden vermijdt:

1 Indien er haakjes staan, maak eerst de bewerkingen tussen de haakjes.
2 Indien er geen haakjes staan, voer eerst de vermenigvuldigingen en de delingen in volgorde van links naar rechts uit.
3 Nadien komen de optellingen en de aftrekkingen aan bod, eveneens in volgorde van links naar rechts.

- *Zo maak je de oefening 32 - 2 x 5 als 32 - 10 = 22 omdat je eerst de vermenigvuldiging uitvoert.*
  Indien bij deze oefening de aftrekking eerst moet komen, dan plaats je haakjes: (32 - 2) x 5 .

- *Een opgave als 36 : 6 x 2 maak je gewoon in volgorde van links naar rechts als 6 x 2 = 12 .*

In hoofdrekenen kunnen enkele 'uitdagende' oefeningen leerlingen confronteren met plaatsen van haakjes en volgorde van bewerkingen.

Vanaf derde leerjaar

- *Gerbert heeft vergeten de +, - , x , : of haakjes te zetten.*
  Zet de tekens op de juiste plaats.
  Twee voorbeelden: 2 + 2 - 2 - 2 = 0
  2 x 2 - 2 + 2 = 4

  2 2 2 2 = 0
  2 2 2 2 = 1
  2 2 2 2 = 2
  2 2 2 2 = 3
  2 2 2 2 = 4
  2 2 2 2 = 5
  2 2 2 2 = 6
  2 2 2 2 = 10
  2 2 2 2 = 12

- *Plaats haakjes, oefenreeks:*

  35 : 7 x 27 - 2 + 8 = 133
  6 x 3 + 4 : 18 - 4 = 3
  80 : 10 + 10 : 2 = 2
  6 + 6 x 7 - 4 = 80

- *Welke uitkomsten kan je allemaal krijgen?*
  Je mag enkel haakjes gebruiken.
  $4 + 4 - 4 - 4 = .$
  $4 \times 4 : 4 + 4 = .$

Plaats van de termen bij een optelling
B4a

Vanaf eerste leerjaar

Reeds vroeg in het eerste leerjaar ervaren leerlingen dat de plaats van de termen bij de optelling geen invloed heeft op de som.
Bekijk de twee volgende situaties:

Lien krijgt twee snoepjes en nadien krijgt ze er vier bij.
Lien krijgt vier snoepjes en nadien krijgt ze er twee bij.

De meeste leerlingen weten dat Lien evenveel snoepjes heeft in beide situaties. Zeker diegenen die zo'n situaties 'aan den lijve' ondervonden, weten dat Lien in de twee gevallen evenveel kan snoepen.

Deze ervaringen verwiskundigen in formulevorm leidt tot:

$2 + 4 = 4 + 2$

Flexibel optellen
B 11

Later kunnen leerlingen deze ervaringen gebruiken bij het flexibel hoofdrekenen.

Denk aan bijvoorbeeld 13 + 98 waar het van plaats wisselen van de termen makkelijker rekenmateriaal levert.

Plaats van de termen bij een aftrekking
B4b

Vanaf eerste leerjaar

Het inzicht dat bij een aftrekking de plaats van de termen wel een rol speelt, is bij kinderen eigenlijk niet aanwezig. Zo worden ze in hun ervaringswereld niet geconfronteerd met aftrekkingen als $2 - 7$ waarbij het aftrektal kleiner is dan de aftrekker. Je kan namelijk geen 7 weggeven als je er maar 2 hebt.

Het is meer dan voldoende dat leerlingen ervaren dat $7 - 2$ wel oplosbaar is in tegenstelling met $2 - 7$.
Hoe je $2 - 7$ oplost, namelijk als $2 - 7 = -5$, is geen leerstof voor de basisschool.

Plaats van de factoren bij een product
B4c
Vanaf tweede leerjaar

De factoren in een product mag je van plaats wisselen.
Bij het aanleren en inoefenen van de tafelproducten komt dit inzicht om het hoekje kijken en levert het een praktische hulp bij het ontdekken van de verbanden tussen de tafelproducten onderling.

Leerlingen ontdekken bij een rechthoekmodel dat 4 x 2 gelijk is aan 2 x 4, want twee rijen van vier leveren hetzelfde aantal op als vier rijen van twee kroonkurken.

Flexibel vermenigvuldigen
B 18

Dit 'van plaats wisselen' kan je bij het flexibel hoofdrekenen toepassen.

Denk bijvoorbeeld aan 23 x 4 wat de meeste leerlingen oplossen als 4 keer 23 of als 4 x 23.

Plaats van de factoren bij een deling
B4d

De plaats van de factoren in een deling speelt een rol.

$4 : 2 = .$, *Verdeel vier stiften met z'n tweeën...*
$2 : 4 = .$, *Verdeel twee grote pizza's met z'n vieren...*

Vanaf tweede leerjaar

Voor beide delingen $4 : 2$ en $2 : 4$ is een ervaringsbasis bij leerlingen voorhanden in verdeelsituaties zoals in het voorbeeld aangegeven.

Verdeelsituaties waarbij de deler groter is dan het deeltal zijn echter van een andere orde dan de andere verdeelsituaties. Zij leiden eerder tot ervaringen met breuken dan tot delingen, zeker in lagere leerjaren.

Het is voor de basisschool voldoende dat leerlingen beseffen dat de factoren bij een deling niet verwisselbaar zijn.

Schakelen bij de optelling
B5a

Het 'schakelen' bij de optelling pas je eigenlijk van in het begin toe maar herken je daarom niet als dusdanig.

Vanaf eerste leerjaar

De optelling $2 + 3 = .$
In een eerste fase breng je dit aan als:
$2 + 1 + 1 + 1$ *of* $2 + 2 + 1$ *of* $2 + 1 + 2$

De schakelmogelijkheid bij de optelling gebruik je in het voorbeeld onbewust. Later ervaren leerlingen bij het optellen van drie termen dat je termen kan samennemen. Zo kan je een oefening als $3 + 19 + 1$ oplossen op verschillende manieren. Hoe je ook 'schakelt', de uitkomst verandert niet.

Schakelen bij de aftrekking
B5b

Dat de schakelmogelijkheid voor de aftrekking niet kan, is niet eenvoudig in te zien.

Vanaf eerste leerjaar

$9 - 6 - 2 = .$

Volgens de algemene afspraak maak je de bewerking als
$(9 - 6) - 2$ *en niet als* $9 - (6 - 2)$.

Leerlingen bewust met deze schakeleigenschap confronteren, kan maar vanaf een tweede leerjaar. Wat wel al kan in het eerste leerjaar zijn volgende oefeningen:

- *7 eraf 4 is 3, 3 eraf 1 is 2*
- $5 - 3 - 1$ *maak je als* $5 - 3 = 2$, $2 - 1 = 1$
  Dit zijn aftrekkingen met meer dan twee termen.

Schakelen bij het product
B5c
Vanaf tweede leerjaar

Het schakelen bij het product is een handige eigenschap.

Zo kan je 12×5 *oplossen als* $2 \times (6 \times 5)$ *of als* $4 \times (3 \times 5)$.

Dit inzicht groeit uit het omgaan met de relaties tussen tafelproducten als 9×6 en 3×6.
Het bewust gebruik van de schakeleigenschap komt bij flexibel hoofdrekenen voor.

Zo kan je een bewerking als $(16 \times 4) \times 25$ *gemakkelijker uitvoeren door eerst de laatste termen te vermenigvuldigen* $16 \times (4 \times 25)$.

Schakelen bij de deling
B5d

Vanaf tweede leerjaar

De deling is ook hier een buitenbeentje. Dat je het schakelen bij de deling niet mag gebruiken, ligt niet voor de hand. Daarom confronteer je leerlingen met oefeningen die hen bewust maken van deze schakeleigenschap.

Derde leerjaar

- *Voer uit:*

(40 : 4) :2 = .	*40 : (4 :2) = .*	*40 : 4 :2 = .*
(25 : 5) : 5 = .	*25 : (5 : 5) = .*	*25 : 5 : 5 = .*
(24 : 6) : 2 = .	*24 : (6 : 2) = .*	*24 : 6 : 2 = .*

Wat zie je aan deze oefeningen?
Probeer zelf eens om zo enkele oefeningen te maken.

Vanaf vierde leerjaar

- Voer uit en vergelijk:

6 : 2 = ☼ → 36 : ☼ = .
36 : 6 = ♪ → ♪ : 2 = .

Steek zelf zo'n oefening in elkaar.

Splitsen in factoren bij een vermenigvuldiging
B6a

Vanaf tweede leerjaar

Deze rekenregel gebruik je dikwijls vanaf het moment dat de introductie van de vermenigvuldiging als een 'keer- handeling' aan bod komt.

"Zes keer drie is vijf keer drie en nog één keer drie bij."

Merk op dat voor de vermenigvuldiging het 'splitsen en verdelen' voor beide factoren geldt.

7 x 6 kan je oplossen als	*(7 x 4) + (7 x 2)*
of	*(6 x 6) + (1 x 6)*
of	*(7 x 7) - (7 x 1)*
of ook nog	*(10 x 6) - (3 x 6)*

Wiskundig geformuleerd: de vermenigvuldiging is zowel links- als rechtsdistributief t.o.v. de optelling en de aftrekkking.
Je kan dit laten verwoorden als:
"Bij de vermenigvuldiging mag je kiezen welke factor je splitst en verdeelt in een som of verschil."

Splitsen in factoren bij een deling
B6b

Vanaf tweede leerjaar

De deling daarentegen is ten opzichte van de optelling en de aftrekking enkel maar rechtsdistributief.

36 : 4	*mag je niet oplossen als*	*36 : (2 + 2) = (36 : 2) + (36 : 2)*
	maar wel als	*(40 – 4) : 4 = (40 : 4) – (4 : 4)*
	of	*(28 + 8) : 4 = (28 : 4) + (8 : 4)*

Leerlingen zullen de eerste (verkeerde) vorm van splitsen en verdelen praktisch nooit gebruiken omdat dit niet in de lijn van het gewone rekenwerk ligt.

Zo weet je bij 36 : 4 dat je een groep van 36 moet verdelen, of een groep van 32 en 4 meer, of een groep van 40 en 4 minder.

Je kan dit laten verwoorden als: "Bij de deling mag je enkel het deeltal splitsen en verdelen in een som of verschil."

Termen veranderen zonder dat de som wijzigt
B7a

Leerlingen ervaren deze rekenregel vanaf het eerste leerjaar.

Bij de splitsingen van 7 zie je deze regel al:
$7 = 1 + 6 = 2 + 5 = 3 + 4 = 4 + 3 = 5 + 2 = 6 + 1$

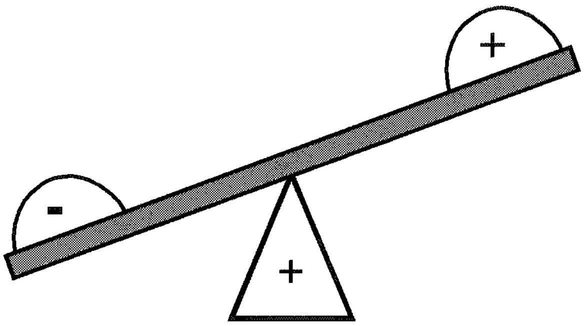
Vanaf derde leerjaar

Het spontaan toepassen van deze regel vraagt een zekere flexibiliteit en krijgt een aanzet vanaf een derde leerjaar.

Flexibel optellen
B 11b

Dit sluit aan bij doel B11b waar het flexibel optellen aan bod komt.

- *37 + 13 via 40 + 10*
- *455 + 295 via 450 + 300*
- *1 455 000 + 295 000 via 1 450 000 + 300 000*



Termen veranderen zonder dat het verschil wijzigt
B7b

Vanaf derde leerjaar

Deze rekenregel is niet eenvoudig in te zien. Om leerlingen te confronteren met deze werkwijze kan je hen een reeks aftrekkingen aanbieden waar deze rekenregel ingebouwd zit.

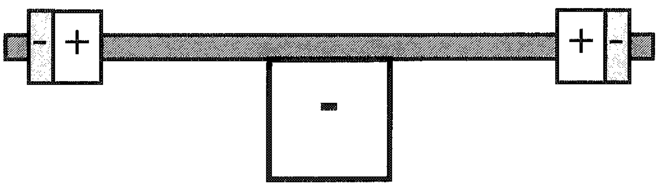
45 - 20 =	*44 - 19 =*
46 - 21 =	*40 - 15 =*
50 - 25 =	*60 - 35 =*

Telkens vind je hetzelfde resultaat. Leg uit hoe je dit aan de opgaven zelf ziet?

Flexibel aftrekken
B 14 b

Het toepassen van deze rekenregel krijgt een aanzet in het derde leerjaar en sluit aan bij doel B14b.

- *485 - 310 via 500 - 325*
- *2 985 - 1 996 via 2 989 - 2 000*
- *98 536 - 39 996 via 98 540 - 40 000*
- *594 647 - 294 997 via 594 650 - 295 000*



Factoren veranderen zonder dat het product wijzigt
B7c

Vanaf derde leerjaar

Sommige leerlingen ervaren deze rekenregel bij tafelproducten en passen deze toe.

Zo weten velen in een derde leerjaar dat 6 x 4, 3 x 8, 2 x 12, 12 x 2 telkens hetzelfde resultaat geven zonder te rekenen omdat ze de rekenregel reeds ervaren hebben binnen de tafels in een tweede leerjaar.

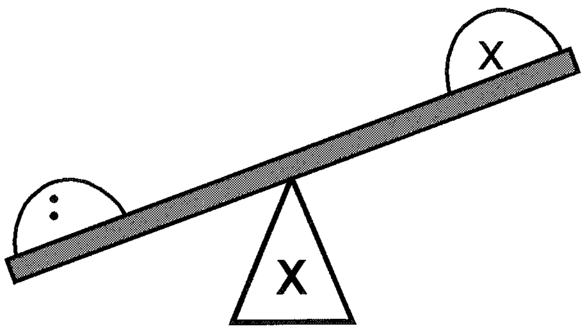
Flexibel vermenigvuldigen
B 18

Vanaf een derde leerjaar krijgt dit een aanzet binnen flexibel hoofdrekenen.

- *24 x 13 via 12 x 26 , 6 x 52 , 3 x 104 (verdubbelen en halveren)*

Vierde leerjaar

- *0,4 x 3 via 0,2 x 6 , 0,1 x 12*
- *1,4 x 5 via 0,7 x 10*
- *8 x 11,5 via 4 x 23*



Factoren veranderen zonder dat het quotiënt wijzigt

B7d
Vanaf derde leerjaar

Een moeilijke rekenregel, maar wel handig! Sommige leerlingen gebruiken die regel reeds binnen de delingstafels.

Denk aan het berekenen van 32 : 4 via 16 : 2 of 8 : 1 wat uiteraard 8 geeft.

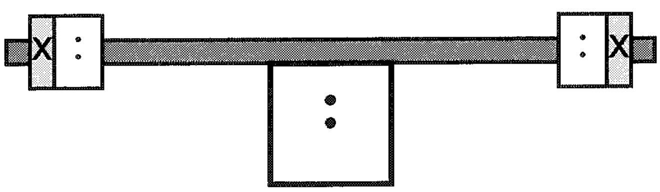
Flexibel delen
B 22

Analoog met doel B22 krijgt deze rekenregel een aanzet in een derde leerjaar.

- *640 : 32 via 160 : 8 , 40 : 2*

Vierde leerjaar

- *2 480 : 16 via 1 240 : 8 , 620 : 4 , 310 : 2*
- *2 520 : 12 via 1 260 : 6*
- *24 800 : 16 via 12 400 : 8 of 6 200 : 4*



Inzicht in de relaties tussen de bewerkingen
B8

Uiteraard is de optelling de omgekeerde bewerking van de aftrekking en is de vermenigvuldiging de omgekeerde bewerking van de deling. Maar dit is niet vanzelfsprekend voor alle kinderen. Het concreet uitvoeren en correct verwoorden van rekenhandelingen kunnen leerlingen hier helpen.

Dat de vermenigvuldiging een verkorting is van een herhaalde optelling zit verwerkt in de didactische aanbreng ervan. De 'keer'- handeling die tot vermenigvuldigen leidt, is namelijk niets anders dan telkens weer dezelfde term toevoegen aan de som die je al had.

$4 \times 5 = 5 + 5 + 5 + 5$

Moeilijker is het verband tussen de aftrekking en de deling inzien. De deling is een verkorting van een herhaalde aftrekking. Dit inzicht kan je niet halen uit het 'eerlijk verdelen' van een hoeveelheid:

12 : 3 = . . , dat is 12 in drie gelijke delen verdelen, elk deel is 4.

Maar het verband tussen de aftrekking en de deling is wel aanwezig in 'verhoudingsgewijs delen':

3 in 12 , neem 1 keer 3 weg, nog een keer, nog een keer en nog een keer. Je hebt 4 keer 3 kunnen wegnemen.

Verband tussen optelling en aftrekking
B8a

Eerste leerjaar

Het is belangrijk om direct bij de introductie van de 'min'- handeling het verband te leggen met de 'plus'- handeling die er de omgekeerde van is. Zo krijgen leerlingen meer inzicht in de bewerkingen zelf en in de relatie die tussen beide bewerkingen bestaat.

- *Je hebt 7 stiften in je pennenzak en je legt er twee opzij.*
  Wie kan hier een vraag bij bedenken en wie geeft een bewerking die hierbij past? (7 – 2)

- *Er gebeurt iets en je hebt terug 7 stiften in je pennenzak.*
  Wat kan er gebeurd zijn en wie schrijft de passende bewerking op het bord? (5 + 2)

Verband tussen vermenigvuldiging en deling
B8b
Tweede leerjaar

- *Als 3 groepjes van 4 samen 12 zijn, dan is twaalf gedeeld door vier drie.*

Verband tussen optelling en vermenigvuldiging
B8c
Tweede leerjaar

- *Hoeveel is 6 keer 2?*
  Jan zegt: "Dat kan je vinden door 6 stappen van 2 op de getallenas te zetten, begin bij 0 - 2 - 4 - ... - ... - ... - 12

Verband tussen aftrekking en deling
B8d

Tweede leerjaar

- *Hoeveel is 64 gedeeld door 20?*
  Lien lost dit zo op: "Vanaf 64 kan ik zeker 2 keer 20 aftrekken, dat is 64 – 20 – 20 = 24, nog een keer 20 af is 4, dus 3 keer. Het quotiënt is 3 en de rest is 4, juf!"

Lien gebruikt het aftrekken in de vorm van het 'sprongsgewijs terugtellen' en ervaart zo dat er een verband is tussen delen en aftrekken.

2.2.3 Hoofdrekenen

2.2.3.1 Natuurlijke getallen

Dit leerplan maakt een onderscheid tussen paraat kennen, standaardprocedures toepassen en flexibel rekenen.

Paraat kennen
B9
B12
B17
B21

Paraat kennen betekent onmiddellijk vanuit het geheugen het resultaat van een bewerking geven.

Paraat kennen veronderstelt dat leerlingen loskomen van het materiaal of de schematische voorstellingen die zij aanvankelijk gebruiken.
Bouw tussenstappen in waarbij je enkel naar de uitgangshoeveelheid kijkt.

19 + 6 = .
Houd de aandacht op de starthoeveelheid 19 welke je situeert net voor 20. Dit kan je visualiseren met behulp van het twintigveld of een getallenas.

Hanteer gevarieerde werkvormen bij het bevorderen van het paraat kennen. Flitskaarten, mondelinge opgaven, allerhande tempospelletjes (met een partner) kunnen helpen.
Het moment waarop leerlingen een bewerking paraat kennen verschilt. Je zal moeten differentiëren. Rekenzwakke leerlingen krijgen voldoende kansen om bewerkingen inzichtelijk te begrijpen voor het paraat kennen aan bod komt.

Om standaardprocedures vlot te kunnen uitvoeren, is het paraat kennen van elementaire bewerkingen onontbeerlijk. Dit ondersteunt tevens het flexibel rekenen.

- *Bij het uitvoeren van 6 + 9 met een standaardprocedure werkt het paraat kennen van 6 + 4 en 10 + 5 ondersteunend.*

- *Bij het uitvoeren van de som 6 + 19 met een standaardprocedure vormen het paraat kennen van 6 + 9 en 6 + 10 een ondersteuning.*
  Anderzijds bevordert ook het inzicht in de getalstructuur het flexibel rekenen als je deze oefening herleidt naar 6 + 20 - 1.
  Je kan deze oefening ook herwerken naar 19 + 6 door gebruik te maken van een eigenschap van de optelling die toelaat dat je termen van plaats mag wisselen. (B4)

Standaardprocedures
B10
B13

Standaardprocedures zijn werkwijzen die toelaten om op een efficiënte manier een bewerking uit te voeren.

Een 'goede' standaardprocedure:

- *gebeurt automatisch: je denkt er niet te veel bij na;*
- *ervaar je als veilig: als je de stappen rigoureus volgt, kom je er;*
- *is efficiënt: de kans dat het resultaat fout is, is klein;*
- *is kort: het aantal denkstappen is beperkt;*
- *laat ruimte voor variatie: binnen de procedure zelf zijn verschillende densporen mogelijk.*

Voorbeelden van standaardprocedures:

- *De afspraak om bij bewerkingen als 49 + 7 eerst aan te vullen tot het volgende tiental (+ 1 = 50) en daarna de overige eenheden erbij te doen (+ 6 = 56) is zo'n standaardprocedure. Om alle stappen van de oplossingsweg te kunnen zetten, moet je de herstructureringen tot 10 kennen (G13) en moet je de elementaire optellingen paraat kennen (B9).*

- *Als je 6 + 19 oplost via 19 + 6 waarbij je eerst aanvult tot het volgende tiental (+ 1 = 20) en nadien doortelt (20 + 5 ,) herleid je deze oefening naar een opgave waarbij je de juist vermelde standaardprocedure kunt gebruiken.*

- *De afspraak om bij bewerkingen als 49 + 17 eerst de tientallen erbij te doen (+ 10 = 59) en daarna de eenheden (+ 7 = 66) is een voorbeeld van een standaardprocedure die licht afwijkt van de vorige. Als je de vorige standaardprocedure volgt, zou je deze opgave oplossen als 49 + 1 = 50, dan 50 + 10 , + 6 waarbij je eerst naar het volgende tiental toe werkt. Beide procedures zijn doortelprocedures.*

- *Bewerkingen als 49 + 37 kan je ook oplossen door een andere standaardprocedure te gebruiken gebaseerd op het splitsen van de getallen binnen ons tientallig talstelsel. Men noemt dit de splitsmethode.*

  49 splits je in 40 en 9 en 37 splits je in 30 en 7
  49 + 37 =
  40 + 30 = 70   9 + 7 = 16   70 + 16 = 76

  Deze splitsmethode raden we af omdat ze eerst en vooral het werkgeheugen meer belast en omdat deze procedure tot fouten leidt bij de aftrekking:

  47 - 19 =
  40 - 10 = 30   9 - 7 = 2   30 + 2 = 32

Leerlingen krijgen de kans om de voor hen meest interessante standaardprocedure te verwerven en vlot toe te passen. Dit inzichtelijk leerproces verloopt niet bij iedereen in hetzelfde tempo. Zo moeten rekenzwakke leerlingen meer tijd krijgen om de verschillende stappen naar de oplossing toe te kunnen zetten.

49 + 37 = .

- *Jos: 49 + 1 = 50   50 + 36 = 86*
- *Inge: 49 + 30 = 79   79 + 7 = 86*
- *Tine: 49 + 10 = 59   59 + 10 = 69*
  69 + 10 = 79   79 + 1 = 80
  80 + 6 = 86
- *Ahmed: 50 + 36 = 86*

Jos, Inge en Tine passen de standaardprocedure van het doortellen toe, maar elk op zijn eigen manier. Je merkt dat Tine meer stappen nodig *heeft en minder oefeningen kan maken dan Jos en Inge, maar dat vind je niet zo belangrijk, als ze het maar begrijpt. Ahmed rekent vlot en flexibel. Meestal gebruikt hij de standaardprocedure, maar hier gebruikt hij een eigenschap (B7a) die nog niemand heeft gezien in deze klas. Ahmed mag vooraan uitleggen hoe dit in elkaar zit.*

Flexibiliteit
B11
B14
B18
B22

Naast het paraat kennen en het beheersen van standaardprocedures moeten leerlingen een zekere flexibiliteit verwerven in de keuze van de oplossingsweg bij het uitvoeren van bewerkingen.

Om flexibel te kunnen rekenen moet je:

- een zeker niveau van parate kennis bereikt hebben;

  Alle optellingen en aftrekkingen tot 20 moet je paraat kennen om vlot binnen het getallenbereik tot 100 te kunnen rekenen.

- een zeker niveau van rekenvaardigheid bereikt hebben in het toepassen van de standaardprocedure;

  Om oefeningen als $47 - 18$ *te kunnen oplossen als* $47 - 20 + 2$ *moet je de standaardprocedure eerst goed doorzien.* $(47 - 10 - 8)$

- inzicht hebben in de structuur van getallen.

  Bij de opgave $717 - 315$ *zie je* 315 *als* $300 + 10 + 5$.

- inzicht hebben in bepaalde eigenschappen van de vermelde bewerking.

  Je weet dat je bij de optelling de termen van plaats mag wisselen.

De oplossingsmethode wordt voor het grootste deel bepaald door de eigenheid van de opgave of de getallen waaruit zij bestaat.

- $2 + 9$ *via* $9 + 2$, $2 + 8 + 1$, $1 + 10$, ...
- $81 - 19$ *via* $81 - 20 + 1$, $81 - 1 - 18$, $82 - 20$, ...

Aanpak

Hoe stimuleer je het best deze flexibiliteit bij hoofdrekenen?

- Geef alleen korte momenten hoofdrekenen. Beter twee korte activiteiten van 10 minuten aan het begin en eind van de wiskundeles dan één moment van 20 minuten. Zo hou je de aandacht scherp en blijft de concentratie bij de leerlingen op hetzelfde peil.

- Stimuleer leerlingen om zelfstandig verschillende oplossingswijzen te vinden en waardeer dit meer dan het zo vlug mogelijk bereiken van de uitkomst.

- Inventariseer kort de verschillende aanpakken op het bord en bespreek. Keur niet alles goed maar geef de voor- en nadelen, vergelijk en stuur de oplossingswijzen bij.

- Reik zelf oplossingswijzen aan die door de leerlingen niet opgemerkt werden en die je toch belangrijk vindt.

- In een hoofdrekenmoment achteraf bied je gelijkaardige oefeningen aan en stimuleer je de leerlingen om 'handige' werkwijzen ('rekenvoordelen') toe te passen.

♦ *OPTELLEN*

Paraat kennen

Som kleiner dan of gelijk aan 10
B9a

Dit zijn de optellingen E + E = E en E + E = T.

2 + 3 =   4 + 5 =   8 + 0 =   3 + 7 =

Eerste leerjaar

Leerlingen van het eerste leerjaar kennen deze optellingen paraat op het einde van het schooljaar.

Som kleiner dan of gelijk aan 20
B9b

Naast de optellingen van het vorige type betreft het vooral de optellingen TE +E = TE ; E + T = TE en E + E = TE.

12 + 3 =   5 + 10 =   9 + 6 =

Vanaf eerste leerjaar

Deze optellingen moeten paraat gekend zijn (tot 20) in het tweede leerjaar en worden herhaald in het derde leerjaar.
De aanzet van optellingen, met som groter dan tien maar kleiner dan twintig, geef je in het eerste leerjaar. Dit betekent dat op het einde van het eerste leerjaar optellingen waarvan de som tussen 10 en 20 ligt niet door alle kinderen paraat moeten gekend zijn.

Volgens standaardprocedures oplossen

Optellingen van het type E + E = E , E + E = T , TE +E = TE ; E + T = TE en E + E = TE moeten leerlingen uit het eerste leerjaar kunnen vinden door een standaardprocedure te gebruiken.

Som kleiner dan of gelijk aan 20
B10 a

6 + 8 =

Sonja verwoordt het zo: "Bij zes doe ik eerst vier bij, dan heb ik tien. Tien plus vier is veertien."

Eerste leerjaar

Om deze oefening op te lossen, maakt Sonja gebruik van:
een herstructurering van 8, 'je kan 8 splitsen in 4 en 4', (G13)
een makkelijke som, '10 plus 4 is 14.'

De standaardprocedure die Sonja gebruikt, kan je als volgt samenvatten:

- het eerste getal laat je ongewijzigd,
- je vult dat getal aan tot het volgende tiental,
- je voegt de rest van de splitsing van het tweede getal (herstructurering van dat getal) erbij.

Optellingen met som kleiner dan of gelijk aan 100
B10 b

De aangeleerde standaardprocedure voor het optellen tot twintig die je in het eerste leerjaar gebruikt, trek je door voor optellingen met een som tot 100 in het tweede leerjaar

Tweede leerjaar

48 + 13 = via 48 + 2 + 10 + 1 = 50 + 10 + 1= 60 + 1 = 61

Deze standaardprocedure laat een zekere flexibiliteit toe. Zo kan je de pas gegeven opgave ook aanpakken als volgt:

- *48 + 13 = via 48 + 10 + 3 = 58 + 2 + 1 = 60 + 1 = 61*
- *48 + 13 = via 48 + 3 + 10 = 51 + 10 = 61*

Dat een zekere flexibiliteit in een standaardprocedure is ingebouwd, is belangrijk in functie van het soepel en flexibel hoofdrekenen. Zo ervaren leerlingen dat efficiënt hoofdrekenen op verschillende manieren kan gebeuren en dat niet alle denkstappen volledig vastliggen. Een goede standaardprocedure legt enkel de 'hoofdroute' vast.

Flexibel optellen
B11

Als leerlingen een aantal optellingen paraat kennen (B9) en de standaardprocedure soepel kunnen toepassen (B10), is de tijd rijp om optellingen binnen hoofdrekenen met een zekere flexibiliteit uit te voeren.
Flexibiliteit kan je niet opleggen maar wel stimuleren door verschillende oplossingswijzen van leerlingen te inventariseren en door te wijzen op 'rekenvoordelen'.
Denk voor de optelling ondermeer aan het gebruik van dubbels, het sprongsgewijs bijtellen, het steunen op reeds gekende oefeningen en aan de eigenschappen vermeld in het leerplan blz. 49 en 50.

Tot 20
B11a

Vanaf eerste leerjaar

- *6 + 8 =*
  - *via 6 + 6 + 2 (dubbels)*
  - *via 6 + 7 + 1 (want dat ken ik al)*
  - *via 6 + 10 - 2 (sprong van 10 is eenvoudiger)*
  - *via 8 + 6 (van plaats wisselen bij de optelling) (B4)*

Tot 100
B11b

Vanaf tweede leerjaar

- *28 + 37 =*
  - *via 28 + 40 - 3*
  - *via 37 + 30 - 2*
  - *via 30 + 37 - 2 ...*
  - *via 30 + 35 (B7a)*
  - *via 20 + 30 + 8 + 7*
    (De laatste oplossingswijze is af te raden omdat leerlingen in de problemen kunnen raken als ze deze oplossingswijze ook toepassen bij opgaven als 42 - 17 via 40 - 10 = 30, 7 - 2 = 5, dus 35)

Tot 1 miljard
B11e

Vanaf vijfde leerjaar

- *1 259 000 + 2 978 =*
  - *via 1 259 000 + 1 000 + 1 978 =*
  - *via 1 259 000 + 2 000 + 978 =*
  - *via 1 259 000 + 3 000 - 22 =*
  - *via 1 260 000 + 1 978 = (B7a)*

♦ *AFTREKKEN*

Paraat kennen

Aftrektal kleiner dan of gelijk aan 10
B12 a

De aftrekkingen zijn van de vorm E - E = E en T - E = E.

9 - 5 = 10 - 3 =

Eerste leerjaar

Leerlingen kennen deze aftrekkingen paraat op het einde van het eerste leerjaar.

Aftrektal kleiner dan of gelijk aan 20
B12 b

Naast de aftrekkingen van het vorige type betreft het vooral aftrekkingen van de vorm TE - E = E en TE - T = E

18 - 9 = 18 - 10 =

Vanaf eerste leerjaar

Leerlingen kennen deze aftrekkingen paraat op het einde van het tweede leerjaar. Ze worden grondig herhaald in het derde leerjaar.
Aftrekkingen, met aftrektal tussen 10 en 20 en aftrekker kleiner dan 10, krijgen een aanzet in het eerste leerjaar en moeten dus niet paraat gekend zijn op het einde van dat eerste leerjaar.

Aftrektal kleiner dan of gelijk aan 20 volgens standaardprocedures
B13 a

Eerste leerjaar

Aftrekkingen van het type E - E = E , T - E = E , TE - E = E en TE - T = E moeten leerlingen uit het eerste leerjaar kunnen vinden door een standaardprocedure te gebruiken.

17 - 11 =
Leo: 17 - 7 = 10 en 10 - 4 = 6

Om deze oefening te kunnen oplossen moet je een aantal dingen kennen:
- *getallen vlot herstructureren: 11 kan je splitsen in 7 en 4, (G13)*
- *elementaire aftrekkingen beheersen: 10 - 4. (B12 a)*

De standaardprocedure die Leo gebruikt is de volgende:
- het eerste getal laat je ongewijzigd
- je vermindert dat getal tot het volgende tiental
- de rest van de splitsing van het tweede getal gaat er dan af

Als de aftrekker meer dan tien is, kan je van in het begin een zekere flexibiliteit in de standaardprocedure inbouwen. (zie B13b)

Aftrektal kleiner dan of gelijk aan 100
B13 b

Gebruik in het tweede leerjaar de aangeleerde standaardprocedure voor het aftrekken die in het eerste leerjaar is gebruikt voor aftrekkingen waarvan het aftrektal maximaal 100 is.

42 - 13 =
- *via 42 - 2 - 11 = 40 - 10 - 1 = 30 - 1 = 29*
- *via 42 - 10 - 3 = 32 - 3 = 32 - 2 - 1 = 30 - 1 = 29*
- *via 42 - 3 = 39 39 - 10 = 29*

Je merkt dat de standaardprocedure een zekere flexibiliteit toelaat.
De eerste oplossingswijze volgt letterlijk de beschreven standaardprocedure terwijl de volgende twee varianten zijn van deze procedure.

Bij de tweede oplossing verminder je het aftrektal eerst met de tientallen en nadien met de eenheden en bij de derde oplossing doe je net andersom.
Deze flexibiliteit schaadt geenszins de standaardprocedure maar vormt er integendeel een verrijking van. Later gebruiken de meesten trouwens één van beide varianten van de standaardprocedure.

Flexibel aftrekken
B14

Nadat de leerlingen een aantal aftrekkingen paraat kennen (B12) en nadat ze de standaardprocedure kunnen toepassen (B13), zijn de meeste leerlingen in staat om aftrekkingen binnen het hoofdrekenen met een zekere flexibiliteit uit te voeren. Uiteraard bereiken niet alle leerlingen hetzelfde niveau van flexibiliteit maar het reduceren van hoofdrekenen tot het louter kunnen toepassen van de standaardprocedure bij rekenzwakken heeft alleen effect op korte termijn. Ze 'kennen' het wel, maar ze 'kunnen' het niet.

De oplossingsmethode wordt in de eerste plaats bepaald door de eigenheid van de opgave of de getallen waaruit zij bestaat.
Inventariseer verschillende oplossingswijzen van leerlingen en wijs op 'rekenvoordelen'.

Denk voor de aftrekking ondermeer aan de hierboven vermelde variaties van de standaardprocedure, het 'overbruggen' van het verschil, het steunen op reeds gekende oefeningen en aan de eigenschappen vermeld in het leerplan blz. 49 en 50.

Tot 100
B14b

Vanaf tweede leerjaar

- *37 - 19 =*

Volgende oplossingswijzen sluiten aan bij de standaardprocedure:

- *37 - 19 = via 37 - 10 - 7 - 2*
- *37 - 19 = via 37 - 7 - 10 - 2*
- *37 - 19 = via 37 - 9 - 10*

Volgende oplossingswijzen geven blijk van een zekere flexibiliteit:

- *37 - 19 = via 37 - 17 - 2 = 20 - 2 = 18*
- *37 - 19 = via 37 - 20 + 1 = 17 + 1 = 18*
- *37 - 19 = via 38 - 20 = 18 (B7 b)*

Een oplossing van een heel andere aard bestaat er in om de 'afstand van 19 naar 37 te overbruggen':
- *19 + 10   29 + 10 = 39   39 - 2 = 37*

Het verschil is 10 + 10 - 2 18. (B8a)

Tot 1 000
B14c

Vanaf derde leerjaar

- *980 - 275 = .*

Standaardprocedure en variaties:
- *980 - 200 - 70 - 5*
- *980 - 100 - 100 - 50 -10 - 10 - 5*
- *980 - 75 - 200*

Meer flexibele aanpakken:
- *980 - 280 + 5*
- *1000 - 295 (B7b)*
- *1005 - 300 (B7b)*
  van 275 naar 980: + 25 + 600 + 80 dus 705

Tot 1 miljard
B14e

Vanaf vijfde leerjaar

- *1 570 000 - 390 000 =*

- *1 570 000 - 70 000 - 300 000 - 20 000 =*
- *1 570 000 - 300 000 - 90 000 =*
- *1 570 000 - 370 000 - 20 000 =*
- *1 570 000 - 400 000 + 10 000 =*
- *1 580 000 - 400 000 = (B7b)*

♦ *VERMENIGVULDIGEN*

Verdubbelen en het dubbele nemen
B15

Tweede leerjaar

Deze doelen beschrijven de rekenhandelingen die nodig zijn om vermenigvuldigingen inzichtelijk te begrijpen. (zie ook B1 en B2)
Leerlingen zijn al vertrouwd met 'verdubbelen' en 'het dubbele nemen'. Inzien dat 'verdubbelen' en 'het dubbele nemen' hetzelfde is als 'vermenigvuldigen met twee' is leerstof voor het tweede leerjaar.
Dit 'verdubbelen' kan als parate kennis een dankbare hulp bij het hoofdrekenen zijn. (zie ook B17)

4 x 8
via 4 x 4 en het dubbele

Plaats van de vermenigvuldiger
B16

Vanaf tweede leerjaar

Schrijf de 'vermenigvuldiger' of het getal dat het 'aantal keer' aangeeft altijd links.

Zo betekent 4 x 5 duidelijk '4 keer 5', '4 groepen met elk 5' of '4 maal 5' en niet ' vier 5 keer nemen'.

Vermenigvuldigingstafels tot en met 10
B17

Tweede leerjaar

Leerlingen moeten de vermenigvuldigingstafels paraat kennen in het tweede leerjaar. Besteed vooreerst voldoende aandacht aan het inzichtelijk opbouwen van de tafels (B2). Het inoefenen heeft echter ook zijn tijd nodig. Sommige leerlingen zullen het product nog vinden door herhaald op te tellen.

Dagelijks enkele tafelproducten inoefenen tijdens een hoofdrekenmoment kan al enige automatisering opleveren. Voor sommige leerlingen is meer automatiseringstijd nodig. Zij slagen er niet in om snel de producten te vinden. Vaak missen zij hardnekkig bij bepaalde opgaven. Dan kan het helpen om vooral die opgaven te memoriseren. Denk eraan dat er steeds een 'vergeetcurve' optreedt. Wat gekend is, blijft dat niet altijd, zeker niet zonder oefening.

Kapstokken

Leerlingen met automatiseringsproblemen kan men 'kapstokken' aanbieden bij het leren paraat kennen van de maaltafels.

- *De 'maal- zichzelf' oefeningen*
  2 x 2   3 x 3   4 x 4

- *De 'maal- zichzelf' oefeningen gecombineerd met één meer*
  2 x 2 → 3 x 2 3 x 3 → 4 x 3 4 x 4 → 5 x 4

- *De dubbels*
  2 x 8 → 4 x 8   3 x 5 → 6 x 5   4 x 7 → 8 x 7

- *De 5 x- oefeningen en één keer meer*
  5 x 2 → 6 x 2   5 x 3 → 6 x 3   5 x 4 → 6 x 4

- *De 5 x- oefeningen en één keer minder*
  5 x 2 → 4 x 2   5 x 3 → 4 x 3   5 x 4 → 4 x 4

- *De 10 x- oefeningen en één keer minder*
  10 x 2 → 9 x 2   10 x 3 → 9 x 3   10 x 4 → 9 x 4

Flexibel vermenigvuldigen
B18

Vanaf tweede leerjaar

Eerst dienen leerlingen de vermenigvuldigingstafels tot tien paraat te kennen (B17). Nadien kiezen ze flexibel een doelmatige oplossingsmethode naar analogie van de tafels en buiten de tafels.

- *2 x 30*
  via 2 x 3 en dan x 10 (naar analogie van de vermenigvuldigingstafels)

- *40 x 14*
  via 40 x 10 en 40 x 4 (buiten de vermenigvuldigingstafels)

Vermenigvuldigen met
10; 100
5; 50
1 000; 10 000
B19

Vanaf tweede leerjaar

Vermenigvuldigingen waarbij het vermenigvuldigtal 10 ; 100 ; 5 ; 50 ; 1 000 of 10 000 is, leveren enkele eenvoudige 'rekenregels' op die voor het schattend rekenen belangrijk zijn.

In de opgave 8,9 x 9,7 benader je 9,7 door 10 en je past de bijbehorende rekenregel toe: 8,9 x 10 = 89, dus het product is ongeveer 90.

Stimuleer leerlingen om een zekere 'rekenregel' te ontdekken in het jaar waarin het leerplan een aanzet vraagt.

Bij het vermenigvuldigen met 5 ontdekken kinderen snel dat de uitkomst de helft is van het vermenigvuldigen met 10. Deze 'ontdekkingen' helpen niet alleen bij het paraat kennen van deze tafels (B17) maar ook bij het ontdekken van bepaalde rekenvoordelen.

Uiteraard kan het niet de bedoeling zijn dat leerlingen een rekenregel zomaar toepassen zonder inzicht. Ook het kunnen verwoorden en kunnen verklaren van de regel moet op regelmatige tijdstippen aan bod komen.

♦ DELEN

Halveren en de helft nemen
B20

Tweede leerjaar

Dit doel beschrijft de rekenhandelingen die nodig zijn om delen door twee inzichtelijk te begrijpen. Leerlingen zijn al vertrouwd met 'halveren' en 'de helft nemen van'.
Inzien dat 'halveren' en 'de helft nemen van' hetzelfde is als 'delen door twee' is leerstof tweede leerjaar.
Halveren van even hoeveelheden is als parate kennis een dankbare hulp bij het hoofdrekenen.

- *480 : 4*
  via 480 : 2 en nadien nog eens : 2

- *72 : 8*
  via 72 : 2 , dan : 2, en nog eens : 2

Delingstafels
B21

Vanaf tweede leerjaar

Zet dit doel aan in het tweede leerjaar. Leerlingen leren hier dat de delingstafels uit de vermenigvuldigingstafels afgeleid worden. In de mate van het mogelijke automatiseren en memoriseren ze al een aantal delingen. De parate kennis van alle delingstafels voor alle leerlingen is leerstof voor het derde leerjaar.

Het is interessant om te zoeken welke opgaven bij elkaar horen en samen een kwartet vormen.

4 x 8 *8 x 4* *32 : 8* *32 : 4*

Deze opgave is pas mogelijk als leerlingen de meeste tafelproducten kennen.

Kapstokken

Wanneer het paraat kennen problemen geeft, kan het werken met 'kapstokdelingen' een oplossing aanreiken.

: 2	*: 4*	*: 8*	→	*telkens een halvering van het quotiënt*
: 3	*: 6*		→	*terug halveringsprincipe*
: 3	*: 9*		→	*twee maal delen door 3*

Deze 'kapstokdelingen' zijn, in tegenstelling met de 'kapstokken' bij de vermenigvuldigingen meer beperkt. Zo vind je geen 'kapstok' waar je een deling met deler 3 of 7 kunt aanhangen.

Flexibel delen
B22

Vanaf tweede leerjaar

Eerst dienen de delingstafels die horen bij de vermenigvuldigingstafels tot en met tien paraat gekend te zijn.
Nadien kunnen leerlingen voor eenvoudige delingen flexibel een doelmatige oplossingsmethode kiezen naar analogie van deze delingstafels en buiten deze delingstafels.
Dit leerplan omschrijft in drie subdoelen nauwkeurig de term 'eenvoudige delingen'.

Opgaande delingen naar analogie van de delingstafels en buiten de delingstafels
B22a

Vanaf tweede leerjaar

De eerste soort eenvoudige delingen zijn de opgaande delingen naar analogie van de delingstafels zoals:

- *720 : 9 =* *via 72 : 9 = 8 , 8 x 10 = 80*
- *1 200 : 4 =* *via 12 : 4 = 3 , 3 x 100 = 300*
- *60 : 4 =* *via 40 : 4 = 10 en 20 : 4 = 5 , 10 + 5 = 15*
- *69 : 3 =* *via 6T : 3 = 2T en 9E : 3 = 3 E , 2T + 3E = 23*

en de opgaande delingen buiten de delingstafels zoals:

- *69 : 3 =* *via 60 : 3 = 20 en 9 : 3 = 3 , 20 + 3 = 23*
- *620 : 5 =* *via 500 : 5 = 100 en 100 : 5 = 20 en 20 : 5 = 4 en 100 + 20 + 4 = 124*

Bij opgaande delingen weten de leerlingen dat de rest gelijk is aan nul. Het is belangrijk om dat regelmatig te verwoorden, zeker vanaf het moment dat niet-opgaande delingen ter sprake komen.

De aanzet van dit doel gebeurt in het tweede leerjaar. Concreet betekent dit dat je oefeningen als 84 : 7 = niet 'drilt'. Het volstaat dat leerlingen van het tweede leerjaar ontdekken dat je zo'n oefeningen kan oplossen door het deeltal op een gepaste wijze te splitsen en te verdelen over de deling.

B6b

Zo is een splitsing van 84 in 80 en 4 hier niet functioneel en moeten leerlingen in een tweede leerjaar begrijpen dat de splitsing van 84 in 70 (een veelvoud van de deler 7) en 14 een functionele splitsing is bij deze opgave.

Niet-opgaande delingen met deeltal kleiner dan honderd, de deler en het quotiënt zijn maximaal tien
B22b

Vanaf tweede leerjaar

De tweede soort eenvoudige delingen zijn de niet-opgaande delingen waarbij het deeltal kleiner is dan honderd, de deler maximaal tien is en waarbij het quotiënt ook maximaal tien is.

- *41 : 5 = q 8 r 1*
- *83 : 8 = q 10 r 3*
- *62 : 7 quotiënt 8 rest 6*

Dit subdoel beperkt de niet-opgaande delingen tot delingen die 'in de buurt van' de delingen uit de delingstafels liggen.

Zo behoort een oefening als 79 : 9 wel tot deze reeks delingen maar zal een deling als 41 : 3 niet in deze reeks voorkomen omdat het quotiënt in dit geval te groot is.
De deling 41 : 3 is een eenvoudige deling, maar zit niet 'in de buurt' van delingen uit de delingstafel van 3 omdat het quotiënt meer dan 10 is. Deze deling hoort thuis bij B22c.

De aanzet van dit doel gebeurt in het tweede leerjaar. Concreet betekent dit dat je oefeningen als 45 : 7 = niet 'drilt'. Het volstaat dat leerlingen van het tweede leerjaar ontdekken dat je zo'n oefeningen kan oplossen door het tafelproduct 42 uit de tafel van 7 hierin te herkennen en het stukje 'rest' opzij te zetten.

De notatie voor een deling wordt vanaf een derde leerjaar:
45 : 7 quotiënt 6 rest 3 of korter 45 : 7 = q 6 r 3

Gebruik die notatie om te vermijden dat leerlingen schrijven:
45 : 7 = 6 + 3

Je leest:
'45 gedeeld door 7 is quotiënt 6 rest 3'
of korter '45 : 7 is 6 rest 3.'

Andere niet-opgaande delingen
B22c

Vanaf derde leerjaar

Een derde soort eenvoudige delingen vormen de niet-opgaande delingen die 'op een eenvoudige manier' te berekenen zijn via het splitsen en het verdelen van het deeltal over de bewerking delen.

- *27 : 2 = q 13 r 1*   *via 27 = 26 + 1*
- *41 : 3 = q 13 r 2*   *via 41 = 39 + 2*
- *205 : 4 = q 51 r 1*   *via 205 = 200 + 4 + 1*
- *775 : 7 = q 110 r 5*   *via 775 = 700 + 70 + 5*

Delen door
10; 100
5; 50
1 000; 10 000
B23

Vanaf tweede leerjaar

Delingen waarbij de deler 10 ; 100 ; 5 ; 50 ; 1 000 of 10 000 is, leveren enkele eenvoudige 'rekenregels' op die voor het schattend rekenen belangrijk zijn.

Bij de opgave 403 : 8,9 benader je 403 door 400 en 8,9 benader je door 10; de bijbehorende rekenregel toepassen levert 400 : 10 = 40, dus het quotiënt is ongeveer 40.

Stimuleer leerlingen om een zekere 'rekenregel' te ontdekken in het leerjaar waarin het leerplan een aanzet vraagt.

Bij het verkennen van de deeltafels ontdekken kinderen snel dat de uitkomst van het delen door 10 de helft is van het delen door 5. Deze 'ontdekkingen' helpen niet alleen bij het paraat kennen van deze tafels (B21) maar ook bij het ontdekken van bepaalde rekenvoordelen.

Een rekenregel zomaar toepassen zonder inzicht heeft weinig zin. Ook het kunnen verwoorden en kunnen verklaren van de regel moet aan bod komen.

2.2.3.2 Breuken

In het basisonderwijs ligt de klemtoon meer op het begrijpen dan op het kunnen hanteren van rekenregels. Voor breuken betekent dit dat het 'breukbegrip' belangrijker is dan 'breukrekenen' (G14).
De rekenmoeilijkheden bij hoofdrekenen met breuken beperk je tot een minimum.
Situaties waarbij de noemer groter is dan tien kunnen sporadisch voorkomen. Het gaat dan wel om eenvoudige berekeningen met 'ronde getallen' in betekenisvolle situaties.

- *1/20 van 1 000 kg*
- *1/12 van een uur*

Ga breuken met noemer 100 niet uit de weg. Gebruik ze bewust als initiatie voor het aanleren van percent en om verhoudingen tussen maten in het metend rekenen te begrijpen.

Een breuk met noemer kleiner dan of gelijk aan 10 nemen van een grootheid en van een hoeveelheid
B24

Vanaf tweede leerjaar

Ervaringen met 'eerlijk (ver)delen' liggen aan de grondslag van breuken van grootheden en hoeveelheden nemen. De aanzet van dit doel komt overeen met doel G14a.

- *Bij een beeldende activiteit verdelen Joost, Katrien, Nele en Raf de penselen eerlijk. "We hebben elk één vierde van de penselen die in het potje zaten," zegt Katrien. "Zou je die penselen ook eerlijk onder vijf kunnen verdelen?" vraagt meester Jos.*

- *De juf verdeelt het grote pak klei zo goed en zo kwaad mogelijk in twee gelijke delen. Nadien verdeelt ze elk deel weer in twee min of meer gelijke delen. "Hoeveel (bijna) gelijke delen heb ik hier?" vraagt juf Marleen.*

Een breuk met noemer meestal kleiner dan of gelijk aan 10 nemen van een getal
B25

Derde leerjaar

In het derde leerjaar nemen leerlingen een breuk van een getal. Deze meer formele toepassing sluit aan bij enkele tafelproducten en delingen uit de delingstafels zoals:

- *1/4 van 8*
- *de helft van 12*

Bewerkingen met breuken

Bied betekenisvolle situaties aan niet alleen bij de aanbreng, maar ook bij de inoefening.
Oefeningen als 6/30 + 17/12 = vormen geen leerstof meer voor de lagere school indien dit niet past bij een situatie waar je aan deze oefening betekenis kunt geven. Zo'n situatie komt in de werkelijkheid eigenlijk niet voor. Het is trouwens opvallend dat je bewerkingen met breuken weinig tegenkomt in dagelijkse situaties.

Optellen en aftrekken met breuken

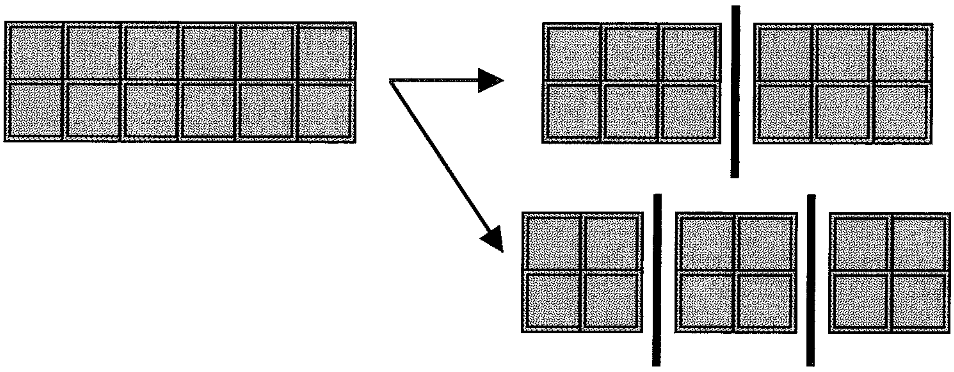
Vierde leerjaar

Het breukbegrip steunt op 'eerlijk delen' (G14). Op dezelfde wijze vormt het 'vergelijken van breuken' de hoeksteen om bewerkingen met breuken uit te voeren. Dit vergelijken van breuken leidt tot de bewerkingen optellen en aftrekken en moet je grondig met kinderen inoefenen.

- *Wat is het grootste stuk, 2/6 van een pizza of 3/6 van dezelfde pizza?*

- *Ik heb twee dezelfde repen chocolade. Piet krijgt 1/3 van de eerste reep en Jefke 1/2 van de andere reep.*
  Wie krijgt het grootse stuk?
  Hoe zou zo'n reep er kunnen uitzien waar je zowel 1/2 als 1/3 gemakkelijk kunt afnemen?"

Kinderen ontdekken bij de laatste opdracht dat het makkelijker wordt als je een reep chocolade neemt waarvan het aantal partjes een veelvoud is van twee en ook een veelvoud van drie:



Je legt met zo'n oefening een basis voor het optellen en aftrekken van ongelijknamige breuken en je geeft een voorbeeld van het gebruik van het kleinste gemeenschappelijk veelvoud.

Bij het vergelijken, het optellen en het aftrekken van breuken in betekenisvolle situaties is het belangrijk te wijzen op het feit dat de referentie-eenheid steeds dezelfde moet zijn. De grootheden en de hoeveelheden waarvan je de breuken neemt, moeten dezelfde zijn.

- *1/3 is meer dan 3/4 in de situatie:*
  1/3 van 3 000 vergeleken met 3/4 van 200
  De hoeveelheden zijn hier verschillend.

- *Voor het bereiden van een beslag voor pannenkoeken heb je 1/2 liter melk nodig en 1/8 kg suiker. Maak de som van de breuken.*
  Het maken van de som van de breuken in dit voorbeeld heeft geen enkele betekenis omdat je over verschillende grootheden praat, namelijk een inhoud en een gewicht.

Optellen en aftrekken van gelijknamige breuken
B26a
B27a

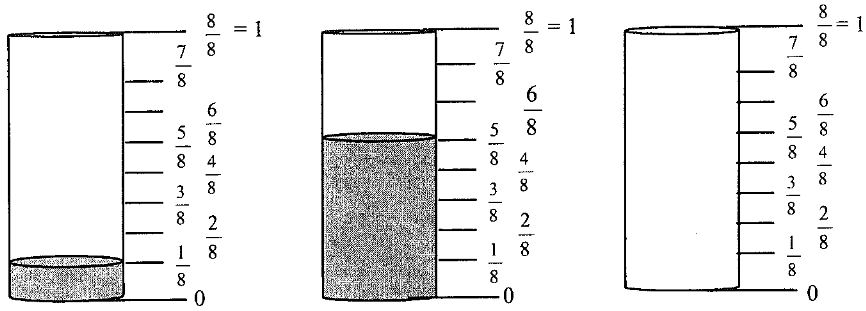
Vierde leerjaar

Het optellen en aftrekken van gelijknamige breuken lijkt eenvoudig. Leerlingen die echter te vlug naar het 'regeltje' grijpen kunnen fouten maken als: 3/4 + 2/4 = 5/8.
Leg daarom dikwijls het verband tussen een situatie en een oefening.

- *Tante Truus heeft twee kleine taartjes gekocht die elk in vier gelijke stukken verdeeld zijn.*
  Zoon Erik heeft grote honger en eet stiekem drie stukken op.
  Dochter Kaat neemt vlug twee stukken mee naar haar kamer. Tante Truus opent de ijskast en schrikt.

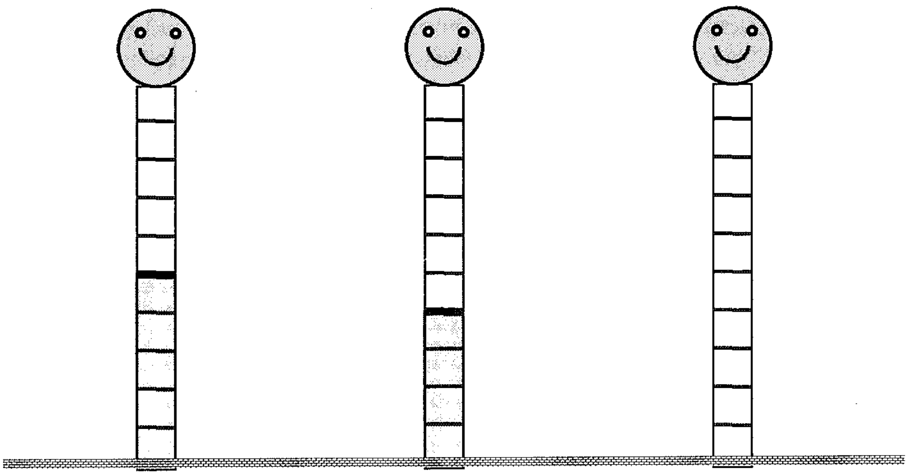
Schrijf met een bewerking met breuken op hoeveel taart tante Truus al kwijt is.

- *De eerste maatbeker is voor 1/8 gevuld. Voor hoeveel is de tweede maatbeker gevuld? Giet beide in de derde maatbeker. Voor hoeveel is die maatbeker nu gevuld?*



Druk het verschil tussen de inhoud van de eerste twee maatbekers uit met een breuk.

- *Op de kermis staat een grote paal, de 'kop van Jut'. Je moet met een zware hamer proberen om een belletje helemaal bovenaan te doen rinkelen. De papa's van Silke, Mieke en Truus betalen elk voor een slag. Hoe hoog de ijzeren bal kwam bij de papa's van Silke en Mieke zie je op de eerste twee tekeningen. Ze konden de bal omhoogslaan tot aan de streep. Maar de papa van Truus sloeg zo ver als de andere papa's samen. Teken dit op de derde tekening.*



Schrijf het verschil tussen de resultaten van de papa's op met breuken.

- *Gisteren at Mia 2/5 van een reep chocolade. De dag ervoor at ze 1/5 op van die reep. Welk deel van de reep heeft ze al opgegeten en welk deel blijft nog over?*

Optellen en aftrekken van ongelijknamige breuken
B26b
B27b

Vijfde leerjaar

Het optellen en aftrekken van ongelijknamige breuken komt in de werkelijkheid weinig voor. De situaties die je aan kinderen aanreikt om deze bewerkingen zinvol te kaderen, zijn daarom niet altijd volledig terug te vinden in de werkelijkheid. Je kiest eerder 'verwiskundigde' situaties. Zo kan je bij het lezen van het eerste voorbeeld terecht opmerken dat niemand dit zo precies en exact verdeelt. De situatie is echter wel betekenisvol om het optellen en aftrekken van breuken te verduidelijken.

Janah knipt 1/2 van een stuk touw en Sahib knipt 1/3 van datzelfde touw.
Wie heeft het langste stuk afgeknipt?
Ze leggen hun stukken touw achter elkaar.

Lineaire voorstelling en breukenbord

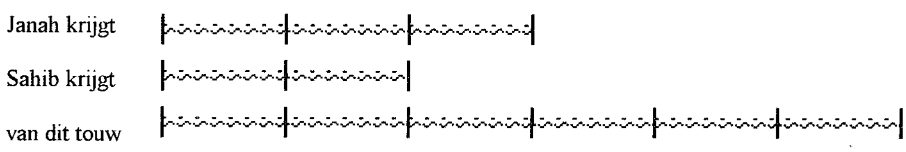
Deze lineaire voorstelling ondersteunt het breukbegrip en is een voorstelling die sterk aanleunt bij het bekende breukenbord.

Druk met een breuk uit hoeveel touw al gebruikt is. (optelling)

Deze vraag leidt tot het maken van de som van 1/2 en 1/3, maar hoe laat je leerlingen ontdekken dat dit niet zomaar gaat?

"Ik zie direct dat 1/2 meer is dan 1/3, maar die twee stukken kan ik niet zomaar samentellen. Jullie hebben reeds geleerd dat je gelijke 'stukjes' kunt samenvoegen. Zo kan je 2/8 en 3/8 samenvoegen tot 5/8 omdat de 'stukjes' gelijk zijn, namelijk stukjes die 1/8 groot zijn. Misschien kunnen we 1/2 en 1/3 ook in gelijke 'stukjes' verdelen die even groot zijn. Probeer maar."

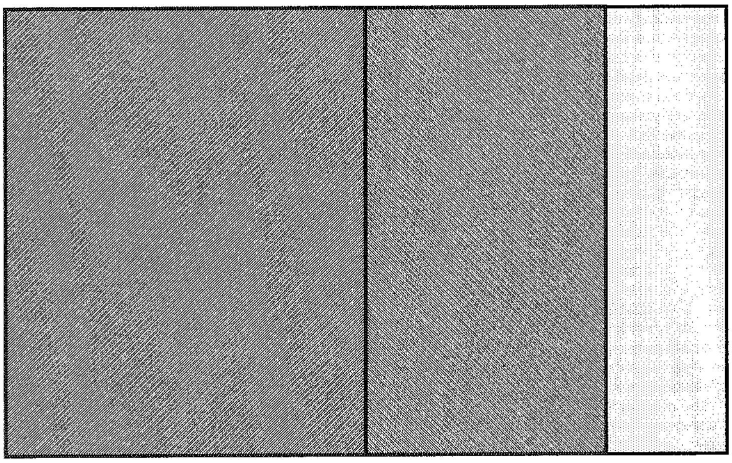
Leerlingen kunnen hier ontdekken dat het verdelen van het 1/2 – stuk in drie (of zes, ...) gelijke delen en het verdelen van het 1/3 – stuk in twee (of vier, ...) gelijke delen leidt tot gelijke 1/6 – stukken (of 1/12 – stukken of ...) van het geheel van het touw. Dit is een aanzet naar het gelijknamig maken van ongelijknamige breuken.



Druk met een breuk uit wat het verschil is tussen beide stukken touw.

Druk met een breuk uit hoeveel touw er nog over is. (aftrekking)

- *Gisteren bewerkte boer Jan 1/2 van een groot stuk land. Boer Jan bewerkt vandaag nog 1/3 van datzelfde stuk land. Teken dit.*

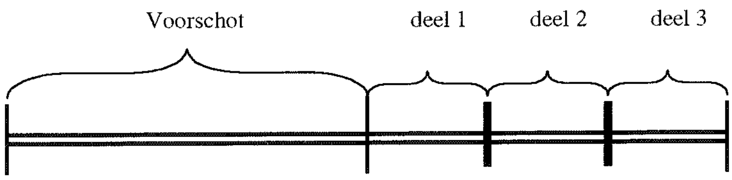


Rechthoekmodel en oppervlaktemodel

De breuk is hier een deel van de oppervlakte van een rechthoek. Men noemt dit een rechthoekmodel of ook oppervlaktemodel. Dit model is zeker nuttig als ondersteuning van 'breuk x breuk' (B28b) en bij 'delen van een breuk door een natuurlijk getal' (B29a).

- *Druk met een breuk uit hoeveel boer Jan reeds bewerkt heeft. Druk met een breuk het verschil uit tussen het stuk grond dat boer Jan gisteren bewerkte en het stuk grond van vandaag.*

- *Julie kocht een fiets en betaalde reeds 1/2 van de prijs als voorschot. Het overschot mocht ze in drie maandelijkse gelijke delen afbetalen. Welk deel van de kostprijs is betaald na twee maanden?*



De fiets kost 240 euro.

- *We wandelen drie kwartier en rusten dan 10 min. Hoe lang waren we reeds onderweg? Zoek de tijdsduur in minuten en in een breuk van een uur.*

- *De mama van Jos snijdt twee gelijke pizza's telkens in twee gelijke delen. Jos, zijn zus, mama en papa krijgen nemen elk een deel. Nadien verdeelt mama een derde pizza van dezelfde grootte: elk krijgt nog een even groot stuk. Druk het deel dat elk heeft gekregen uit in een breuk.*

Vermenigvuldigen en delen met breuken

Beperk vermenigvuldigen en delen met breuken tot 'eenvoudige' breuken en in praktische gevallen.

Merk op dat het vermenigvuldigen van een breuk met een breuk en het delen van een natuurlijk getal door een stambreuk enkel een aanzet krijgen in het zesde leerjaar.
Het delen van een breuk door een (stam)breuk en het delen van een natuurlijk getal door een breuk die geen stambreuk is, is geen leerstof voor het basisonderwijs.

Breuk vermenigvuldigen met een natuurlijk getal ***B28a***

Vijfde leerjaar

Eenvoudige breuken vermenigvuldigen met een natuurlijk getal komt in dagelijkse situaties voor.

- *In het recept voor het maken van wafels staat:*
  Voor 8 personen:
  ..., 1/4 liter water, 1/2 liter melk, 2 en 2/3 kop bloem,...
  Hoeveel melk, water, bloem heb je nodig als juf Mieke wafels wil bakken voor 16 personen? En voor 24?

- *Elke dag eet de pa van Tine 1/4 van een reep chocolade.*
  Komt hij met twee repen per week toe? Leg uit.

- *Het verschil tussen schoenmaten is telkens 2/3 cm.*
  Hoe groot is het verschil in lengte tussen schoenen met maten 37 en 42?

- *Gemiddeld eet elk lid van de familie Bertels 2/3 van een pizza.*
  Vanavond zijn ze met vijf personen.
  Hoeveel pizza's bestellen ze?

- *In dit flesje gaat 1/4 liter room.*
  Hoeveel liter room zit er in een grote verpakking met 24 flesjes?

Het is niet moeilijk om bij dit subdoel betekenisvolle situaties te bedenken. Om de leerlingen de rekenwijze te laten ontdekken: 'Om een breuk te vermenigvuldigen met een natuurlijk getal vermenigvuldig je de teller met dit natuurlijk getal en laat je de noemer van de breuk ongewijzigd.' kan je op de 'keer'- handeling steunen.

7 x 2/3 = 7 keer 2/3
= 2/3 + 2/3 + 2/3 + 2/3 + 2/3 + 2/3 + 2/3 = 14/3

Kijk nu enkel naar de opgave en de uitkomst.
Wie kan dit korter?

Om opgaven als 'breuk x natuurlijk getal' op te lossen kan je het 'van plaats wisselen' gebruiken of 'breuk nemen van een getal'.

- *2/3 x 60 = 2 keer 1/3 van 60 = 2 keer 20 = 40 (B25)*
- *2/3 x 60 = 60 x 2/3 = 120/3 = 40 (B4 c en B 28 a)*

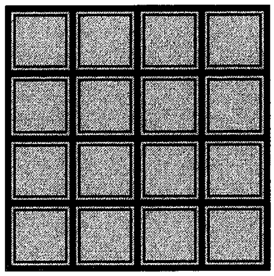
Breuk vermenigvuldigen met een breuk
B28b

Vanaf zesde leerjaar

Een breuk vermenigvuldigen met een breuk zet je aan in het zesde leerjaar. Dit betekent dat je dit subdoel niet systematisch inoefent.

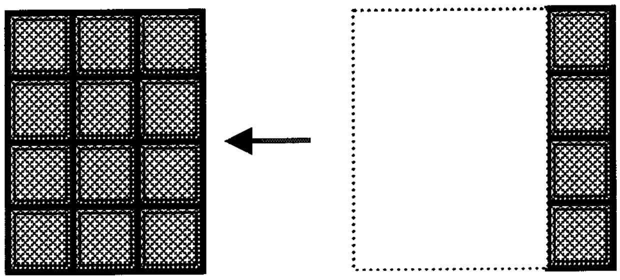
Leerlingen ervaren dit leerstofonderdeel in betekenisvolle situaties.

Wat krijg je als je 1/2 van 3/4 van deze reep chocolade krijgt?



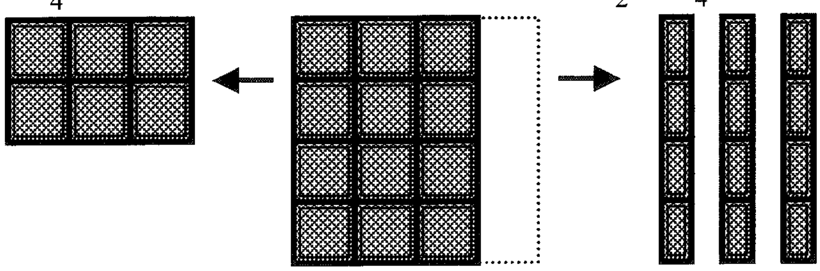
Eerst neem je 3/4 van de reep:

$\frac{3}{4}$ van de reep



Van dit deel neem je nu 1/2. Je hebt dus 1/2 van 3/4.

$\frac{1}{2}$ van $\frac{3}{4}$ van de reep — of — $\frac{1}{2}$ van $\frac{3}{4}$ van de reep



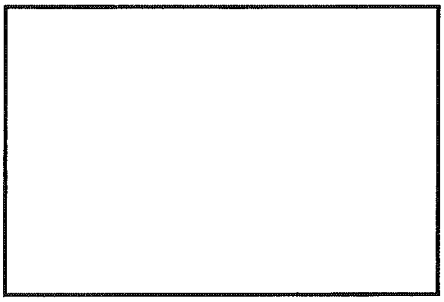
Met de eerste tekening krijg je:
1/2 van 3/4 = 1/2 van 12 stukjes = 6 stukjes van 16 = 6/16 of 3/8

Bekijk de tweede tekening. Hier is de verdeling op een andere wijze getekend. Als je 1/2 van een hoeveelheid neemt, kan je dat ook doen door van elk stukje de helft te nemen. Wiskundig moet dit uiteraard dezelfde uitkomst geven.

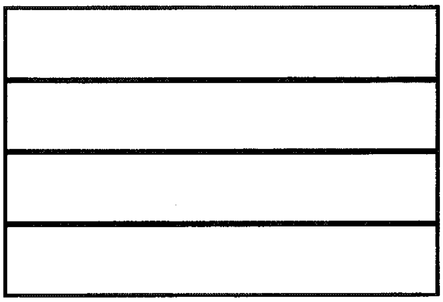
1/2 van 3/4 = 1/2 van 12 stukjes
= 12 halve stukjes van elk 1/32 groot
= 12/32 = 3/8

Het rechthoekmodel biedt bij dit voorbeeld (1/2 x 3/4) van 'breuk x breuk' een visuele ondersteuning.

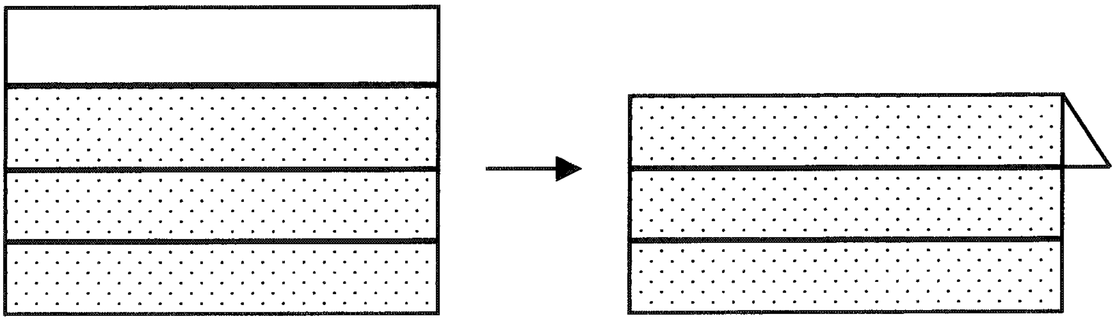
- *Vertrek van een rechthoek die het geheel voorstelt*



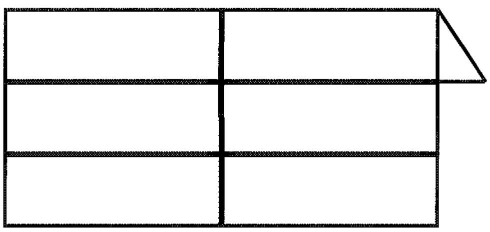
- *Eerst verdeel je de rechthoek horizontaal in vier gelijke delen.*



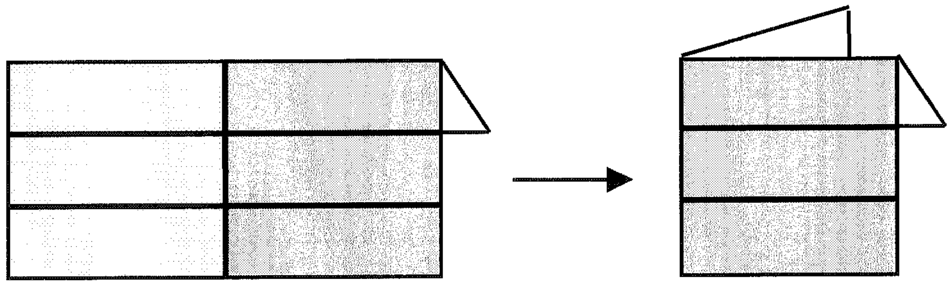
- *Teken, knip of vouw drie van de vier gelijke delen, zo krijg je 3/4 van het geheel van de rechthoek*



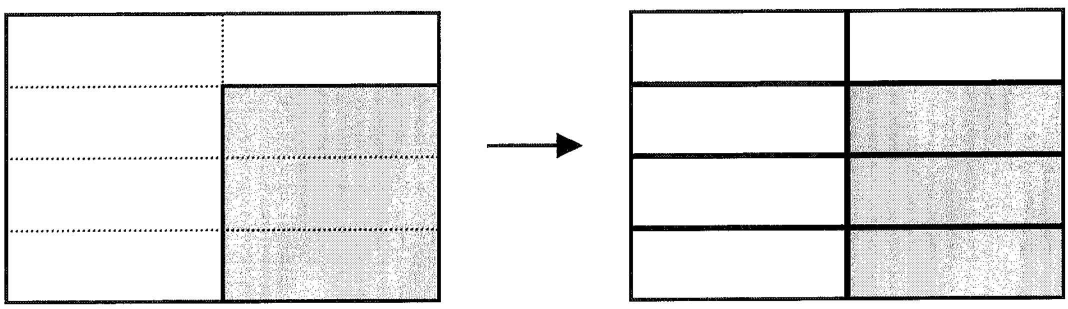
- *Verdeel nu dit deel verticaal in twee gelijke delen*



- *Teken, knip of vouw één van de twee gelijke delen, zo krijg je 1/2 van 3/4 van het geheel van de rechthoek*



- *Plaats dit terug in het geheel, dan zie je onmiddellijk de oplossing, namelijk 1/2 van 3/4 = 3 van de acht hokjes = 3/8*

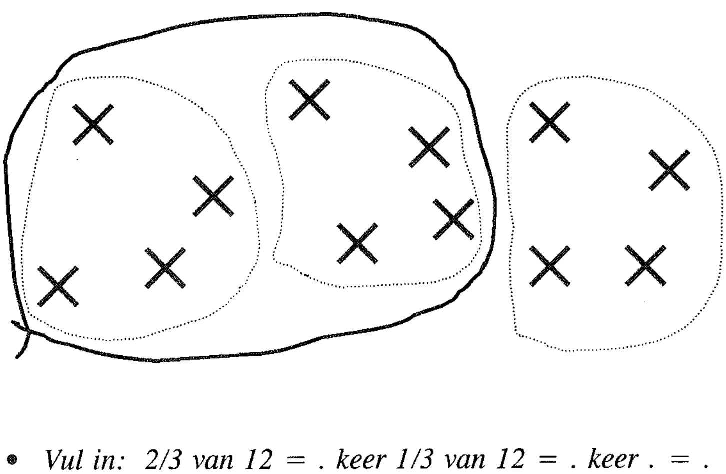


Sterkere leerlingen mogen hierop verder oefenen, maar naar de hele klasgroep toe is een aanzet met bijvoorbeeld het rechthoekmodel (zie voorbeeld hierboven) voldoende.

Betekenis van 'van' bij breuken

Hoe kan je laten aanvoelen dat 'x' bij breuken dezelfde betekenis heeft als 'van'?

- *Teken 12 kruisjes en zet een kring rond 2/3 ervan.*



- *Vul in: 2/3 van 12 = . keer 1/3 van 12 = . keer . = .*

- *Reken uit:*

  $\frac{2 \times 12}{3} = \frac{24}{3} = 8$

  Wat merk je op als je beide oplossingen vergelijkt?

  $2/3 \text{ van } 12 = \frac{2 \times 12}{3} = 2/3 \times 12$

Breuken delen door een natuurlijk getal
B29a

Vijfde leerjaar

'Eenvoudige breuken delen door een natuurlijk getal' komt in het dagelijks leven wel enigszins voor.

- *4/6 van een reep blijft over en dit stuk verdeel je eerlijk met zijn tweeën, drieën, vieren, ...*

- *Een kwart van de leerlingen van de middelbare school rookt regelmatig, één derde deel daarvan komt voor rekening van de jongens en de rest zijn meisjes.*

Merk op dat leerlingen deze probleemstellingen ook kunnen oplossen met behulp van B28b.

1/3 deel van 1/4 kan je oplossen als 1/3 van 1/4 = 1/3 x 1/4, maar ook als 1/4 : 3.

Het verruimt het inzicht van de leerlingen als ze de gelijkwaardigheid van beide rekenregels zelf ontdekken.

Breuken delen door een stambreuk
B29b

Vanaf zesde leerjaar

Voor het subdoel 'een natuurlijk getal delen door een stambreuk' geef je in het zesde leerjaar enkel een aanzet.

Hier kunnen nogal wat leerlingen raar opkijken.

Hoe kan het dat delen door iets een resultaat oplevert dat groter is dan het deeltal?
4 : 1/3 = 12

Het idee dat het quotiënt bij een deling altijd kleiner moet zijn dan het deeltal is namelijk sterk aanwezig bij de meeste leerlingen.

Aanpak

Hoe kan je dit leerstofonderdeel aanpakken?

- *Eerst laat je leerlingen ervaren wat 'in' betekent:*
  "Hoe kan je nagaan hoeveel keer 12 in 36 gaat?"

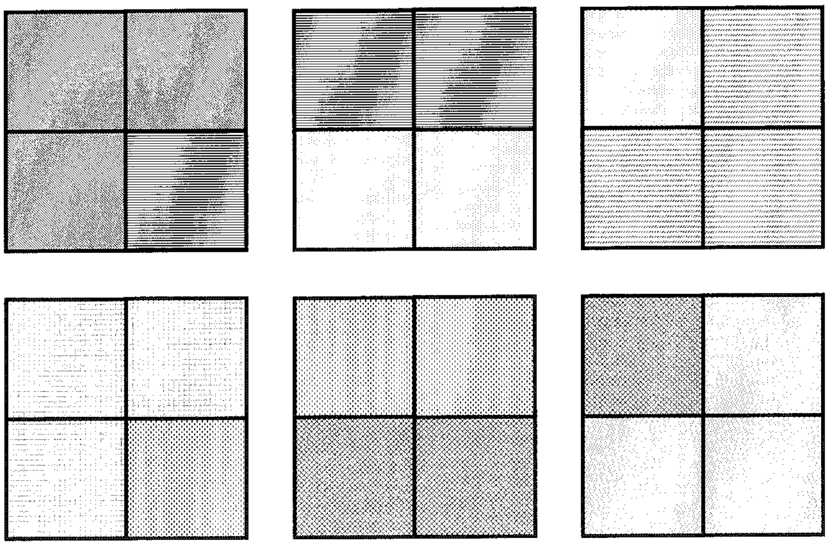
  * *Eric telt door per 12 tot hij 36 bereikt,*
  * *Lies deelt 36 door 12,*
  * *An begint bij 36 en doet er telkens 12 af,*
  Conclusie: 12 in 36 = 36 : 12 = 3

- *Gebruik nu de ervaring van de vorige verdeelsituatie.*
  "Hoeveel stukjes van een halve euro (of 50 cent) heb je nodig om een boek van 5 euro te kopen?"

- *Giet deze ervaringen nu in een 'rekenzin':*
  0,5 in 5 = 5 : 1/2 = 10

Deze verkenning is voldoende voor de hele klas. Sterkere leerlingen kan je dit verder laten verkennen en oefenen.
Een denkoefening voor de rekensterke leerlingen:

Ik schrijf op het bord:
6 : 3/4 =
Wat betekent deze opgave eigenlijk? (nagaan hoeveel keer 3/4 in 6 gaat)
Teken de oplossing.



B33 Ditzelfde 'verschijnsel' doet zich ook voor bij het delen door een kommagetal waarbij het kommagetal ligt tussen 0 en 1.

2.2.3.3 KOMMAGETALLEN

Eenvoudige kommagetallen

Bewerkingen met kommagetallen doe je enkel met eenvoudige kommagetallen. De notie 'eenvoudig' hangt af van situatie tot situatie. Zo zijn nogal wat leerlingen vertrouwd met getallen die achter de komma twee à drie decimalen hebben. Denk onder meer aan prijzen in euro, recordtijden in de sport, ...
Maar bij het rekenen 'uit het hoofd' met kommagetallen kies je best voor 'gemakkelijke' kommagetallen.

2,75 + 1,25 = . reken je vlotter uit het hoofd dan 2,84 + 58,7 = .

Uiteraard kies je bij moeilijker opgaven voor cijferen of het gebruik van zakrekenmachine om de bewerking op te lossen.

'Addertjes onder het gras' bij kommagetallen

Voor het rekenen met kommagetallen begint, moeten leerlingen goed weten wat een kommagetal precies is. (zie getallenkennis)

- *Toon zegt bij 0,09: "Dit is 9 tienden."*

Dit heeft te maken met de asymmetrie die de komma in een voorstelling van een getal teweegbrengt. Zo staan de tientallen twee plaatsen voor de komma en de tienden één plaats achter de komma.

- *Annelies: "2,11 is groter dan 2,9."*

Deze vaak voorkomende fout voorkom je door de kommagetallen zeker in het begin precies te verwoorden: 2,11 lees je als "2 gehelen, 1 tiende en 1 honderdste."
Je kan ook 2,9 schrijven als 2,90. Als je dan beide getallen naast elkaar plaatst, kunnen al heel wat leerlingen hun fout antwoord bijsturen.

- *Juf Anouscka: "Welk getal ligt precies tussen 2,8 en 2,10?"*
  Iris: "2,9 juf."

  Juf Anouscka biedt deze opgave opnieuw aan maar dan in een meetsituatie:
  "Welke lengte ligt precies in het midden van 2,8 m en 2,10 m?
  De kale getallen 2,8 en 2,10 en de oplossing 2,45 krijgen in deze meetsituatie betekenis als 2 m en 80 cm , 2 m en 10 cm en 2 m en 45 cm. Voor velen werkt dit verhelderend.

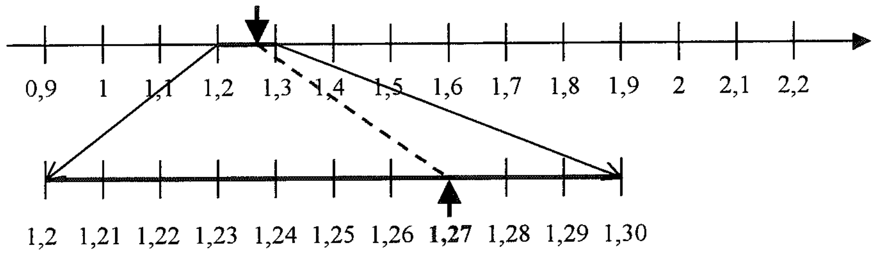
- Een analoge opgave is:
  Welk van de volgende gewichten ligt het dichtste bij 1,98 kg?
  2,12 kg 1,9 kg 1,895 kg 2,001 kg

  Ook hier kan het plaatsen van de opgave in een meetsituatie het denkproces van de leerlingen ondersteunen.

- *Meester Jules: "Hoeveel getallen liggen tussen 1,2 en 1,3?"*
  Anny: "Enkele."
  Meester Jules: "Noem zo'n getal dat tussen 1,2 en 1,3 ligt?"
  Anny: "Kan eigenlijk niet, want 3 komt net na 2 en daar is geen getal tussen."

Het plaatsen van kommagetallen op een getallenas moet zeker aandacht krijgen. Zo 'zien' leerlingen dat tussen 1,2 en 1,3 zeer veel – oneindig veel - kommagetallen liggen.

Waar ligt 1,27?



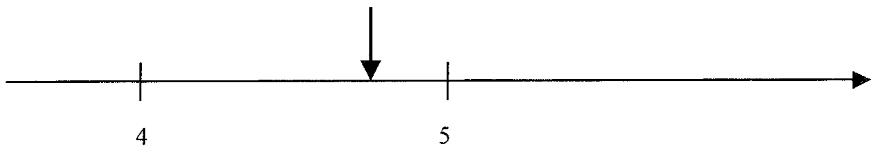
Schattend hoofdrekenen met kommagetallen

Vergeet zeker het schattend hoofdrekenen met kommagetallen niet.

> *Zo is het belangrijker om te weten dat je met 5 euro voldoende hebt om een schrift van 1,95 euro en een pen van 2,75 euro te kopen, dan te weten hoeveel 1,95 + 2,75 precies, tot op een cent, is.*

Dit schattend rekenen is niet eenvoudig omdat nogal wat leerlingen denken dat schatten maar op één manier kan. Soms leidt dit tot situaties waarbij leerlingen denken dat de uitkomst niet juist is omdat ze een andere schatting hebben dan de schatting die op het bord staat.
Schakel daarom oefeningen in waarbij het schatten de belangrijkste doelstelling is.

- *Schat welk getal bij de pijl staat.*



- *Waar ligt de uitkomst van 25,7 + 4,51 = . het dichtste bij?*
  7 30 300 700

- *Maarten heeft de oefening gemaakt met zijn zakrekenmachine. Hij vergat echter de komma te zetten. Plaats de komma.*
  44,8 x 0,5 = 224
  7,5 + 2,85 = 1035
  3,75 - 0,4 = 335
  0,6 : 4 = 15

- *Onder elk afdekkaartje staat één cijfer.*
  Duid de mogelijke uitkomst aan.
  43,::: + 56,::: = 80 100 110 120

Kommagetallen optellen en aftrekken
B10
B31

Leerlingen moeten eenvoudige kommagetallen uit het hoofd kunnen optellen en aftrekken.
Dit betekent dat je een opgave als

2,25 + 7,55=

Vierde leerjaar

gerust kan geven omdat deze oefening met een eenvoudige redenering op te lossen is:

2 gehelen en 7 gehelen, dat zijn er 9 gehelen
25 honderdsten en 55 honderdsten samen vormen 80 honderdsten
Antwoord: 9,80

Een verband leggen tussen kommagetallen en meetsituaties zoals:

Jan zet een grote stap van 0,7 m en nadien een stap van 0,8 m

kan bepaalde rekenfouten voorkomen (zie hogerop) omdat het rekenwerk meer betekenis krijgt.

Kommagetallen in betekenisvolle situaties

Dit betekent geenszins dat elke opgave in een betekenisvolle situatie moet gegoten worden. Het is zelfs aan te raden om regelmatig enkele 'kale' opgaven hoofdrekenen met kommagetallen aan te bieden samen met enkele oefeningen waar enkel het schatten belangrijk is. Zo kan enerzijds het rekenwerk met kommagetallen, waar de uitkomst exact moet zijn, vlotter verlopen en krijgt anderzijds het schattend rekenen met kommagetallen aandacht waar de leerling de uitkomst bij benadering bepaalt.

Gebruik van hulpmateriaal

Naast het leggen van een verband met een meetsituatie kan het gebruik van positiemateriaal (MAB, abacus, ...) of een schematische voorstelling (een getallenas, een schrijfschema, ...) het hoofdrekenwerk ondersteunen.

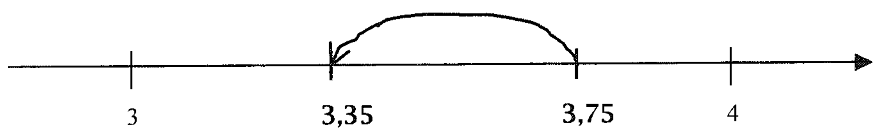
Bij precies rekenen

- *Een oefening als 3,75 - 0,4 = . kan je eerst met MAB- materiaal of ander positiemateriaal voorstellen. Dit helpt leerlingen om meer inzichtelijk te werk te gaan.*
  - *4 staven zijn evenveel waard als 40 blokjes*
  - *40 blokjes wegnemen van 75 blokjes, ik heb 35 blokjes over.*

Je kan de exacte oplossing '3,35' relatief snel vinden door de opgave met de MAB- blokken te materialiseren. Je legt, verschuift en neemt blokken weg.

Bij schattend rekenen

- *Dezelfde opgave 3,75 - 0,4 = . op de getallenas:*



Het tekenen van 3,75 tussen 3 en 4 waarbij je de afstand 0,4 aangeeft met een pijl ondersteunt het situeren van de oplossing.

Merk op dat het maken van de tekening al een 'schattende benadering' van de opgave op voorhand inhoudt. Zo moet je weten dat bij deze opgave de getallen 3 en 4 eerst een plaats moeten krijgen en dat je die best niet te dicht tegen elkaar tekent, anders is de 'sprong' 0,4 veel te klein om de oplossing schattend te situeren.

Het voorstellen op een stukje getallenas van zo'n opgaven ondersteunt eerder het schattend dan het precieze rekenen.

Gebruik de getallenas echter pas als leerlingen reeds voldoende inzicht hebben in kommagetallen.

Een leerling die denkt dat 3,75 meer is dan 3,9, omdat 75 meer is dan 9, zal er niet in slagen om de opgave 3,75 - 0,4 = . schattend op de getallenas te tekenen.

Vermenigvuldigen van een kommagetal met een natuurlijk getal en delen van een kommagetal door een natuurlijk getal
B32a
B33a

Vanaf vierde leerjaar

De leerlingen verkennen de kommagetallen en maken met eenvoudige kommagetallen optellingen en aftrekkingen. Sporadisch komen enkele eenvoudige vermenigvuldigingen en delingen aan bod.

- *0,12 + 0,12 + 0,12 + 0,12 + 0,12 = .*	*"Kan dit korter?"*
- *10 x 1,5 = .*	*"Hoe pak je dat aan?"*
- *0,8 : 4 = .*	*"Leg dit met blokjes."*
- *5,5 : 5 =*	*"Hoe verdeel je 5 euro en 50 cent eerlijk onder z'n vijven?"*

Vooral in het vijfde leerjaar komen oefeningen aan bod als:

0,1 x 7 =	*2,3 x 2 =*	*4,8 : 2 =*
0,5 x 8 =	*40,5 x 4 =*	*92,12 : 4 =*
0,01 x 20 =	*8,1 x 5 =*	*1,5 : 50 =*
0,001 x 30 =	*45,5 x 10*	*0,4 : 100 =*

Let op. Het gaat hier over hoofdrekenen met eenvoudige kommagetallen. Dit betekent dat de leerling de oefeningen makkelijk uit het hoofd moet kunnen uitrekenen.

Vergelijk de oefeningen 1,5 : 50 = . en 0,117 : 13 = .

- *1,5 : 50 is betrekkelijk eenvoudig te herleiden tot 150 h : 50 of 3 h, dus 0,03.*

- *0,117 : 13 = . is op dezelfde wijze te herleiden tot 117 d : 13, maar de berekening 117 : 13 = 9 uit het hoofd maken, is niet zo eenvoudig .*

'Verkapt' cijferen

Leerlingen passen dikwijls bij het oplossen een vorm van cijferen toe.

4 x 40,5 = .
4 x 5 t = 20 t = is 2 E
4 x 0 = 0
4 x 4 is 16
Samen: 162

Deze aanpak is geen hoofdrekenen maar een vorm van cijferen. Stimuleer leerlingen om bij hoofdrekenen zo veel mogelijk vanuit het 'grootste' te beginnen. Het voordeel van deze aanpak is dat je meteen een schatting van het resultaat krijgt.

4 x 40,5 = .
4 keer 40 is 160
en dan nog 4 keer 5 t of 2 E erbij
Samen: 162

De eerste denkstap (4 keer 40) geeft direct een schatting. De leerling weet namelijk dat de oplossing in de buurt van 160 zal liggen. Als je deze oefening zo benadert, heb je een aanpak waarbij het schattend benaderen van de uitkomst het precieze rekenen voorafgaat.
In nogal wat praktische gevallen volstaat zo'n schatting.

Een reeks van vier woordenboeken kost 40,50 euro per deel.
Heb ik met 160 euro voldoende om de hele reeks te kopen?

Vermenigvuldigen van een kommagetal met een kommagetal en delen van een kommagetal door een kommagetal
B32b
B33b

Vanaf vijfde leerjaar

Oefeningen als *0,4 x 1,6 en 4,2 : 0,03* vormen voor heel wat leerlingen struikelblokken als ze deze oefeningen uit het hoofd moeten berekenen.

Geef deze oefeningen vooral in het zesde leerjaar met een aanzet in het vijfde.
Zo'n opgaven inzichtelijk verwerken is geen eenvoudige klus. Dikwijls schakelt de leerkracht te vlug over op het aanleren van de 'heuristiek' en krijgt het inzichtelijk rekenproces te weinig aandacht.

0,4 x 1,6 = .
Ik moet 0,4 keer 1,6 nemen. Dus moet ik 4 tienden van 1,6 nemen. Dat is 4 keer één tiende van 1,6 of 4 keer 0,16 is 0,64.
Bekijk nu eens goed de opgave en denk de komma's weg.

Schatten helpt om te zien of de komma wel op de juiste plaats staat:

0,4 x 1,6 = .
0,4 is ongeveer 0,5 of de helft en de helft van 1,6 is 0,8.
De oplossing ligt dicht bij 0,8.

Eigenschap van de vermenigvuldiging

Om de vermenigvuldiging makkelijk uit te voeren, gebruik je volgende eigenschap: 'Het product van twee getallen verandert niet als één factor vermenigvuldigd wordt met een getal en de andere factor gedeeld wordt door hetzelfde getal' (B7c).

0,4 x 1,6 is 4 x 0,16 = 0,64

Eigenschap van de deling

Om de deling makkelijk uit te voeren, gebruik je volgende eigenschap 'Het quotiënt van een deling verandert niet als beide factoren met hetzelfde getal vermenigvuldigd of gedeeld worden.'(B7d)

- *27,3 : 0,3 is hetzelfde als 273 : 3 = 91 (B22a)*

- *Hoe zit dat nu bij 70,05 : 0,5 = . ?*
  70,05 : 0,5 of 700,5 : 5 = 140,1 (B33a)

B36a

Stimuleer om de oplossing eerst te schatten. Zo krijgen de leerlingen een middel in handen om de grootteorde van de uitkomst globaal te benaderen. Bied opgaven aan waarbij het schattend benaderen de essentie van de opgave is. Dit zijn opgaven waarbij de leerling niet zoekt naar de exacte uitkomst maar naar een situering van de grootteorde van de uitkomst

Welke oplossing is de juiste?
27,3 : 0,3 = 0,091 0,91 9,1 91 910?
27,3 dat is ongeveer 30
Hoe dikwijls gaat 3 t in 30 gehelen? Precies 90 .

Het antwoord ligt dicht bij 90.
Denk nu de komma's in de opgave weg en reken uit.

Natuurlijke getallen delen door een natuurlijk getal waarbij het quotiënt een kommagetal is.
B34a

Dit soort oefeningen komt relatief vaak voor.

Welke bewerking kan je bij het volgende verhaal schrijven?
Aaike, Melissa, Fara, Saar, Eva en Dana bestellen 3 grote pizza's en verdelen die zo eerlijk mogelijk....
Loes noteert 3 : 6 = ... En wat is de uitkomst?

Vanaf vierde leerjaar

De oefeningen moeten eenvoudig zijn.

4 : 8 = .   8 : 5 = .   40 : 100 = .
20 : 80 = .   40 : 50 = .   80 : 1000 = .

Moeilijker delingen voer je niet met hoofdrekenen uit.
Oefeningen als:

4 : 8 = .   20 : 100 =   14 : 4 = .

kunnen in een vierde leerjaar aan bod komen op het moment dat het rekenen met kommagetallen zijn intrede doet. Zo ervaren leerlingen dat kommagetallen een nieuw soort getallen zijn naast de natuurlijke getallen en de breuken.

- *2 / 4 = 0,5*
- *14 : 4 = q 3 r 2 kunnen ze nu schrijven als 14 : 4 = 3,5*
- *1 / 3 met de ZRM geeft 0,3333333*

Bijzondere aandacht voor delingen door 5 ; 10 ; 100 en 1 000
B34a

Delingen door 5 ; 10 ; 100 en 1 000 krijgen een bijzondere aandacht. De bijbehorende 'rekenregels' laat je niet nodeloos inoefenen, maar het ontdekken en toepassen van deze rekenregels zijn wel aspecten van flexibel rekenen.

Natuurlijke getallen delen door eenvoudige kommagetallen
B34b

Vijfde leerjaar

De beperking tot eenvoudige gevallen is niet gemakkelijk te omschrijven. Zo ervaart iedereen dat een oefening als:

330 : 0,001

eenvoudiger is dan een oefening als

3 : 0,15

Delingen door 0,1 ; 0, 01 ; 0,001 en 0,5 vlot kunnen uitvoeren, heeft zeker zijn waarde.

- *Hoeveel cent gaat er in 4 euro? (4 : 0,01)*
- *Hoeveel halve euro heb je nodig om een boek van 12 euro te betalen?*
  (12 : 0,5)

B7d

Om deze soort delingen, en vooral de delingen naar analogie van de delingstafels, vlot uit het hoofd te kunnen uitvoeren, is het toepassen van doel B7d erg handig.

- *4 : 0,01 = 400 : 1 = 400*
- *56 : 0,8 = 560 : 8 = 70*

2.2.3.4 PERCENTEN

Percent (of procent)
G25
G26
G27

Dit leerplan kiest voor de term 'percent'. Uiteraard is de term 'procent' niet fout, maar taalkundig krijgt 'percent' een lichte voorkeur.

Een 'percent' begrijpen, kunnen interpreteren en kunnen gebruiken als een operator en als een verhouding vind je in de toelichtingen bij het leerdomein getallenkennis.

Eenvoudig

De beperking 'eenvoudig' betekent dat het rekenwerk beperkt en overzichtelijk blijft.

25 % korting levert een voordeel op van 1/4 van de prijs.
Een pull van 40 euro kan ik dan kopen voor 30 euro.

Praktische gevallen

De beperking 'in praktische gevallen' betekent dat je leerlingen herkenbare situaties aanbiedt waar het zinvol is om het percent van een grootheid of een getal te berekenen.

- *Een korting van 30 %.*
- *Interest op een rekening.*
- *Je maakt twee toetsen voor wiskunde. Op de eerste haal je 13 op 20 en op de tweede haal je 15 op 20.*
  Hoeveel percent heb je eigenlijk behaald voor wiskunde?
- *Bekijk deze reclame:*

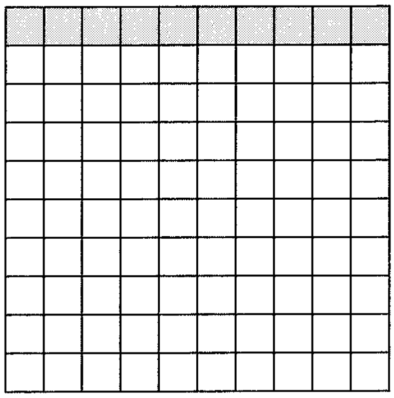
De 'oude' prijs van de videocassettes is dezelfde in winkel A en winkel B. Waar koop je als je één, twee, drie, vier, vijf... videocassettes nodig hebt?

Voorstellen

Het rekenen met percenten ondersteun je best visueel.

Honderdveld

In dit geval is het honderdveld zeker bruikbaar.



- *Kleur één strook rood.*
  Welk deel is dat van het honderdveld? Eén tiende.
  Hoeveel hokjes zijn dit? Tien.
  1/10 van 100 = 10 vakjes van 100 = 10 % van het honderdveld.

- *Kleur 20 hokjes geel.*
  Welk deel is dat van het honderdveld? Eén vijfde.
  1/5 van 100 = 20 vakjes van 100 = 20 % van het honderdveld.

B35

Vijfde leerjaar

- *Een stuk tekenpapier dat zo groot is als het honderdveld op het bord kost 3 euro.*
  Ik knip er een reep af die precies 15 hokjes groot is.
  Hoeveel kost die reep papier?
  15 hokjes is 15 keer 1 hokje.
  Ik neem 15 keer 1/100 van 300 cent of 15/100 van 300 cent.

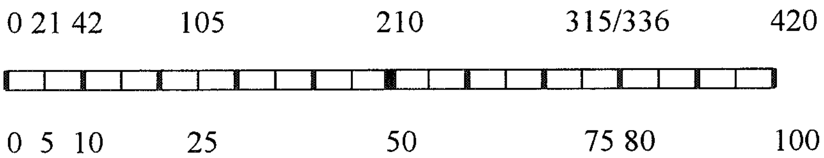
Een m²

Heb je geen honderdveld, dan kan je een m² verdeeld in dm² gebruiken. Het honderdveld en de verdeelde vierkante meter hebben dezelfde structuur.

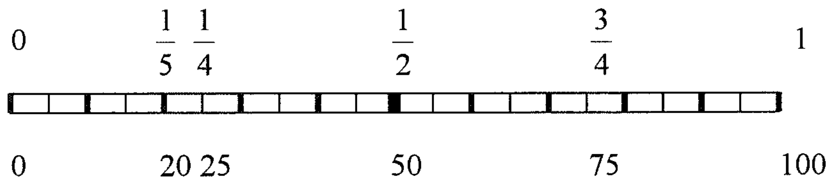
Percentstrook

Je kan ook een 'percentstrook' gebruiken.

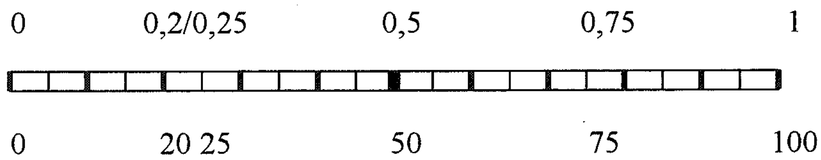
In een pot mayonaise Waldo kan 420 gram. Daarvan is 336 gram vet. Hoeveel percent is dat?



Zoals je kan merken op bovenstaande tekening is het mogelijk een percent te berekenen met behulp van een 'dubbele getallenlijn' waarbij je de referentiehoeveelheid waarvan je het percent neemt, laat overeenkomen met 100 (%). Tegelijkertijd geeft dit model een manier aan om een percent van een hoeveelheid schattend te benaderen.
Je kan die percentstrook ook combineren met een soort breukenstrook.

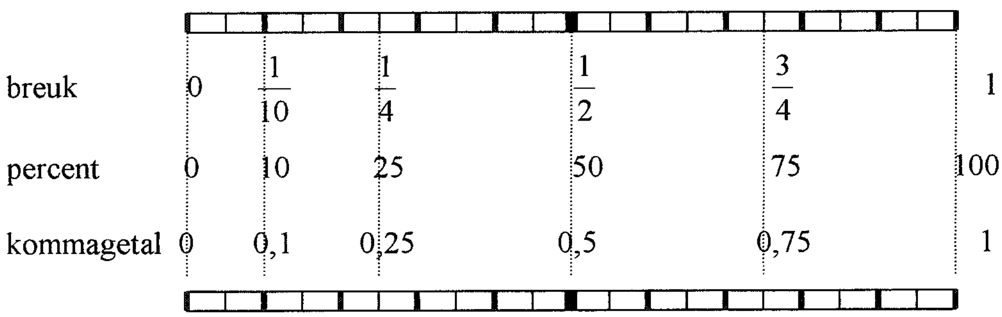


En zelfs met kommagetallen.



G27

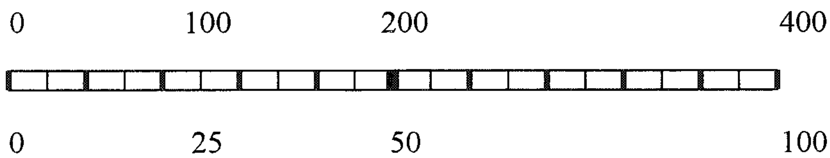
Een combinatie van de laatste twee stroken levert een visuele voorstelling van de gelijkwaardigheid van breuken, kommagetallen en percenten.



Aanpak percentrekenen
Eerste fase

In een eerste fase komen eenvoudige percenten als 10%, 20%, 25%, 50%, ... van 'ronde' getallen aan bod. Deze zijn gemakkelijk met behulp van een percentstrook uit te rekenen. Het rekenwerk steunt voornamelijk op hoofdrekenen en verhoudingsrekenen.

Wat is 25% van 400?



Percentstrook

Je ziet op de percentstrook bijna onmiddellijk het resultaat en dit met weinig rekenwerk. Percent als een verhouding 'op honderd' komt bij deze benadering sterk op de voorgrond. Daarnaast laat de percentstrook toe om percenten die niet eenvoudig zijn in een eerste stap schattend te benaderen.

- *Zo is het duidelijk dat 23% van 400 dicht bij 100 moet liggen.*
- *En je kan merken dat 12 % van 400 dicht bij de helft van 100 ligt of dicht bij 50.*

Tweede fase

In een tweede fase streef je naar een meer algemene benadering die de leerlingen toelaat om elk percent te berekenen.

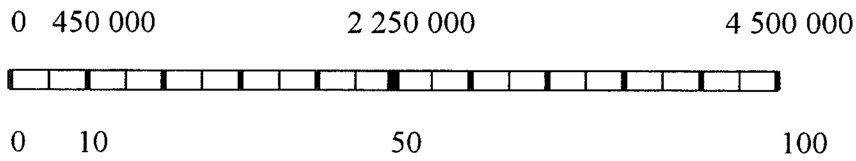
Om het percent van een grootheid of een getal uit te rekenen, begin je uiteraard best met het percent te berekenen van 'ronde' getallen.

23 % van 400 = .
23/100 van 400 = 23 x 4 = 92
1 % van 400 is 4, dus 23 % is 23 keer 4 = 92

Uiteindelijk kunnen leerlingen ook oefeningen aan als:

De BTW op nieuwbouw is verlaagd tot 6 %.
De aannemer van Tom en Els schat de bouwkosten van hun nieuw huis op 120 000 euro.
Hoeveel BTW moeten ze daarop betalen?
6% van 120 000 = 6/100 van 120 000 = 6 x 1 200 = 7 200
Tom en Els zullen dus best zeker 7 200 euro voorzien.

Ook hier levert de 'percentmeter' (percentstrook) een mooie schatting op.



6 % van 120 000 is wat 'verder' dan 5 % van 120 000
ligt iets voorbij de helft van 12 000, dus wat meer dan 6 000

Waarde van de schatting

Het is niet eenvoudig om in te zien dat de schatting van 6 000 euro een goede schatting is omdat het precieze resultaat 1 200 euro meer is, en dat is toch een groot verschil. Maar het is belangrijk om in te zien dat een schatting een benadering is die helpt om de juiste uitkomst te situeren en die helpt om te zien of je exacte rekenwerk wel juist is. Zo is de schatting van 6 000 hier zinvol om te controleren of je geen 'rangordefout' hebt gemaakt, bijvoorbeeld 720 of 72 000 in plaats van 7 200.

Gebruik van percenten, kommagetallen en breuken

Percent gebruik je enkel als operator en niet als een 'getal'. Zo is een oefening als '*20 % + 1/2 + 0,15 = .* weinig betekenisvol.

Uiteraard is het belangrijk dat leerlingen inzien dat 20 % overeenkomt met 1/5 en overeenkomt met 0,2, maar vermijd om met die verschillende verschijningsvormen te rekenen.

2.2.4 SCHATTEND REKENEN

Vier rekenwijzen

Naast hoofdrekenen, cijferen en rekenen met een rekenmachine is schattend rekenen een veel gebruikte rekenwijze. Dit schattend rekenen in combinatie met eenvoudig hoofdrekenen komt in het dagelijks leven veel voor en krijgt een belangrijke plaats in dit leerplan.

- *Je schuift met een volgeladen kar naar de kassa toe.*
  "Heb ik wel voldoende geld op zak?"
  In deze situatie ga je ruw schatten. Zo is het in de eerste plaats niet belangrijk te weten hoeveel euro en hoeveel cent je precies moet betalen, maar wel of je met dat ene briefje van 50 euro op zak wel voldoende hebt.

- *Ik wil een nieuwe vloer leggen. Hoeveel m² bestel ik?*
  Bij dit voorbeeld zal een eerste raming gebeuren door ruw, op het zicht, te schatten. Dit kan door de lengte en de breedte met enkele 'reuzenpassen' van ongeveer 1 m lengte te benaderen
  Maar als het bijvoorbeeld om een dure vloer gaat, meet je nauwkeuriger . Dan zal je niet tevreden zijn met een ruwe benadering. Ook het vloermotief kan een rol spelen. Bestaat dat uit heel grote stenen, dan zal je misschien meer moeten bestellen omdat de vloerlegger bij het 'bijsnijden' meer stukken krijgt die hij niet meer kan gebruiken.

Wat is schatten?

"Schatten is niet zomaar raden en evenmin precies bepalen, maar het zit er tussenin." (Adri Treffers)

Schatten staat tussen blind of in het wilde weg gissen en exact of numeriek precies rekenen. Dit schattend rekenen acht men dikwijls ten onrechte minderwaardig in vergelijking met het precieze rekenwerk.

Rekenen versus schatten

Rekenen is vooral een precieze aangelegenheid in ons wiskundeonderwijs waarbij de nauwkeurigheid sterk in de kijker staat. Dat is op zich niet verkeerd. De grondslag voor een goede vaardigheid in schattend én precies rekenen steunt op vlot rekenwerk.

Als je als leerkracht alleen maar het precieze resultaat benadrukt, dan zijn leerlingen niet zo gauw geneigd om een globale benadering te kiezen bij hun rekenwerk.

Waarom schattend rekenen?

Waarom is schattend rekenen zo belangrijk?

1 Schatten moet meestal omdat exacte gegevens ontbreken.

Hoe hoog is een flatgebouw van 7 verdiepingen?

2 Schatten mag omdat dikwijls een benaderende uitkomst volstaat.

Hoeveel pannenkoeken moet het oudercomité minstens bakken voor het schoolfeest? Vorig jaar kwamen bijna 500 mensen en bakte men 485 stuks. De medewerkers konden 's avonds wel hun buikje rond eten want er waren zeker 50 pannenkoeken over.

3 Schatten is meestal zinvoller dan exact rekenwerk.

Knalprijs: 'Jas: van 44 euro naar 26,40 euro'
' 40 % korting!'
Klopt dat '40 % korting'?
Schattend rekenen geeft snel uitsluitsel of de aangegeven prijs ongeveer correct is:
40 % is bijna 50 %, de helft van 44 euro is 22 euro. De jas kost wat meer dan 22 euro.

Door hier af te zien van de 'details' van de getallen in kwestie en te kiezen voor passende afrondingen, bereik je op een vrij eenvoudige wijze snel een betrouwbare 'ongeveer oplossing' waarmee je greep krijgt op de situatie.

Welke kennis, inzichten en vaardigheden moeten leerlingen beheersen om goed te kunnen schatten?

Wat moeten leerlingen kennen en kunnen om schattend te kunnen rekenen? (zie ook toelichtingen getallenkennis)

1 Inzicht hebben in ons plaatswaardesysteem.

- *145 ligt ongeveer halfweg 100 en 200, iets meer naar 100,een gemakkelijke benadering is 150.*
- *18 kan je meestal benaderen door 20, maar 81 benader je door 80, hoewel soms kan de ruwe benadering '100' voldoende zijn.*

2 De basisbewerkingen tot 20 en tot 100 beheersen.

3 Vermenigvuldigings - en delingstafels kennen.

Rekenen met ronde getallen

4 Vlot kunnen rekenen met 'ronde' getallen.

Ronde getallen zijn getallen die in de buurt van de gegeven getallen liggen en die meer hanteerbaar zijn.
Afronden is situatiegebonden:

Zo kan je 8,75 afronden naar 9 als je wilt weten of je wel genoeg geld hebt om drie artikels te kopen die elk 8,75 euro kosten. Maar je kan 8,75 gerust afronden naar 10 om een eerste ruwe schatting te maken van het resultaat bij 8,75 x 4,6.

Rekenen met getallen met veel eindnullen

Onder dit rekenen met 'ronde' getallen situeert zich ook het vlot rekenen met 'nullen'.

De opgave 925 x 9 543 benader je schattend door 900 x 10 000.

Als je vlot met 'nullen' kunt rekenen, levert je rekenwerk direct een eerste schatting op.

Schattingen relativeren

5 Schatfouten en onnauwkeurigheden relativeren en inzien.

925 x 9 543

Mogelijke benaderingen:

900 x 10 000 ; 925 x 10 000 ; 1 000 x 9 500 ; 1000 x 10 000

Voor welke schatting je kiest, hangt af van de situatie waaraan de bewerking 925 x 9 543 verbonden is.

Hoe motiveer je leerlingen om te schatten?

Hoe kan je leerlingen op weg helpen om meer schattend te rekenen?

- Stel eerst de vraag of een globale dan wel een precieze oplossing nodig is in de gegeven situatie.

  - *Greet komt altijd te voet naar school samen met haar broer. Ze woont 3,7 km van onze school. Welke afstand legt Greet ongeveer af op een week?*

  - *Deze rekening kreeg ik bij de slager maar het totale bedrag is er afgescheurd. Thuis noteer ik alle uitgaven in een boek. Wat noteer ik?*

- Kies passende afrondingen en bereken met enkele eenvoudige rekenhandelingen een 'ongeveer-oplossing'.

  - *De afstand van onze school naar het huis van Greet is ongeveer 4 km. Ze blijft op school eten, dus deze afstand legt Greet 2 keer per dag, of 10 keer per week, af. Dat is dus ongeveer 8 km per dag en ongeveer 40 km per week.*

  - *Maar bij de rekening van de slager reken ik precies, een ongeveer-oplossing is niet zinvol.*

- Plaats de 'ongeveer-oplossing' terug in de oorspronkelijke situatie en bespreek.
  Stimuleer hierbij leerlingen om tevreden te zijn met een 'globale of ongeveer-berekening'.

  - *Nu zie ik dat ik de afstand 3,7 km gemakkelijk kan vermenigvuldigen met 10.*
    3,7 x 10 = 37. Het zal dus iets minder dan 40 km zijn.
    Eigenlijk is deze oplossing voldoende, want misschien maakt Greet soms wel eens een ommetje. De afstand 3,7 km zal ook niet heel precies zijn.

  - *Het bedrag bij de slager was 31 euro en 45 cent. Hier moet je natuurlijk wel precies rekenen, want ik hou mijn uitgaven precies bij.*
    Het is anders als de vraag was: "Heb ik met twee briefjes van 20 euro genoeg geld bij om deze rekening te betalen?" Dan is een vlugge schatting meer zinvol dan een precieze berekening.

Grootte- orde van het resultaat
B 36
Vanaf tweede leerjaar

Schattend en benaderend rekenen is als vierde rekenwijze niet los te koppelen van één van de andere drie rekenwijzen omdat dit schattend rekenen een hulp vormt bij het controleren van de uitkomsten als je
- uit het hoofd rekent,
- een cijferalgoritme hanteert,

- een zakrekenmachine gebruikt.

Door schattend te rekenen bepaal je in welke 'orde van grootte' of grootteorde het exacte resultaat van een bewerking zich situeert.

- *386 : 78 is ongeveer 400 : 80 = 5, dus dicht bij 5*
- *45,8 x 18,6 is ongeveer 45 x 20 = 900, dus dicht bij 900*

Schattend en benaderend rekenen moet je leren. Bied daarom oefeningen aan waar een schatting maken voldoende is.

- *Waar ligt de uitkomst het dichtst bij?*

4 x 3,6 =	*12*	*14*	*16*
12 x 8,1 =	*96*	*97*	*98*
2,5 x 2,5 =	*4*	*6*	*9*

- *Bij welk 'rond getal' ligt de uitkomst dicht bij?*
  87 + 19 ligt dicht bij 100 en nog dichter bij 110.

Situeer dit 'kaal' rekenen in betekenisvolle situaties om leerlingen een steunpunt te geven:

- *Is 7 + 6 meer of minder dan 10?*

- *Ligt de uitkomst van 92 - 78 = . in de buurt van 20?*

- *Vier consumpties van 3,60 euro in plaats van 4 x 3,6.*
  Dit maakt de schatting 4 x 3 + 4 x 0,50 voor de hand liggend.

- *Yvonne rekent uit op haar rekenmachine:*
  715,347 + 589,2 + 4,553 = 13091
  Bij het opschrijven van het antwoord is ze de komma vergeten. Wat moet het antwoord zijn?

Schatten bij gebruik van de zakrekenmachine

Leerlingen die cijferen of werken met de zakrekenmachine (ZRM) schatten zelden spontaan vooraleer ze de bewerking uitvoeren. Het nut van schatten bij gebruik van de zakrekenmachine constateer je meestal op het moment dat je de uitkomst terugplaatst in de situatie. Bij de confrontatie met een 'onmogelijke' uitkomst zullen leerlingen meestal teruggrijpen naar het machientje om stap voor stap de bewerkingen opnieuw uit te voeren. Jij kan in zo'n situaties wijzen op het belang van het maken van een voorafgaande schatting:

- Je hebt meteen een ruwe benadering van het resultaat.

- Dit resultaat plaats je terug in de situatie. Zo controleer je de gevolgde oplossingsstrategie voor je begint aan het rekenwerk met de ZRM.

- Een schatting maken, geeft je een idee van de uitkomst ook als je de ZRM niet op zak hebt en dit is zeker handig in heel wat praktische situaties.

Schatten bij cijferen

Het maken van een schatting voorafgaand aan cijferen moet je aanvankelijk opleggen aan de leerlingen. Mettertijd zien ze het nut van schatten in en groeit het voorafgaand schatten uit tot een attitude.

Merk op dat schattend rekenen geen 'raden' naar de uitkomst is. Na het cijferen moet je de leerlingen vragen het resultaat te vergelijken met de schatting. Vergeet niet dat het aanbieden van cijferoefeningen in betekenisvolle situaties zeker helpt om het nut van schatten in te zien. Een schatting geeft je dan meteen een uitkomst waar je betekenis kan aan geven.

Op de kade in de Antwerpse haven staan 7 829 kisten sinaasappelen. Elke vrachtwagen van de firma 'Overalfruit' kan precies 506 kisten laden.
Hoeveel keer moeten de vrachtwagens van de firma laden om de hele hoeveelheid kisten in de opslagruimte van 'Overalfruit' te krijgen?

De schatting kan zijn: 8000 : 500 of 800 : 50 of 80 : 5, dus 16.
Cijferen levert een quotiënt van 15,472.
Uiteraard is het boeiend om te zien of leerlingen bij deze situatie begrijpen dat de oplossing 16 moet zijn en dat de schatting dus hier toevallig het juiste antwoord levert.

Schatten in het eerste leerjaar

Het leerplan voorziet geen aanzet in het eerste leerjaar. Toch kan je eenvoudige oefeningen geven die een meer schattende benadering zijn in tegenstelling met meer exacte rekenoefeningen.

- *4 + 5 is altijd meer dan 4*
- *8 - 3 is zeker minder dan 7*
- *4 + 5 is meer dan 4 + 4 , dus meer dan 8*
- *4 + 5 is dat meer of minder dan 4 + 2?*
- *Is de uitkomst boven of onder de 10?*

Schatten in het tweede leerjaar

In het tweede leerjaar geef je zeker een aanzet voor zinvol schatten.

- *9 x is minder dan 10 x terwijl 11 x meer is dan 10 x*
- *7 x ligt tussen 6 x en 8 x*
- *74 + 8 is meer dan 80, want 4 + 8 is meer dan 10*
- *34 + 28 is zeker meer dan 60*

Vanaf vierde leerjaar

Het is belangrijk dat leerlingen weten dat bij een 'ruimere' afronding het resultaat verder van de exacte uitkomst kan liggen. Ook weten of de schatting groter of kleiner is dan het exacte resultaat is een belangrijk inzicht dat ten vroegste in het vierde leerjaar een aanzet krijgt.

- *Als je de opgave 365,5 + 168,75 benadert door 350 + 150 is het zinvol om te weten dat het resultaat meer is dan de schatting (500) want je hebt bij deze optelling zowel de eerste als de tweede term naar beneden afgerond.*

- *Als je 5 175,6 - 2 919 schattend benadert door 5 000 – 3 000 dan is het zinvol te weten dat het exacte verschil meer is dan 2 000, want bij de afronding is het aftrektal verminderd en de aftrekker vermeerderd.*

Afronden aanleren

Afronden moet je aanleren. Vaak gebeurt het dat kinderen onvoldoende durven afronden, ze werken dikwijls met moeilijk doorzichtige getallen.

- *3 713+ 768,5 kan je afronden naar 3 700 + 800 maar een afronding als 4 000 + 500 of 3 500 + 1 000 levert heel wat makkelijker rekenmateriaal en is meestal voldoende.*

- *371 : 3 kan je benaderen door 375 : 3 maar de benadering 369 : 3 levert makkelijker rekenwerk. Je gebruikt de eigenschap van de deelbaarheid door 3 namelijk:*
  3 H : 3 = 1 H, 6 T : 3 = 2 T en 9 E : 3 = 3 E.

De wijze van afronden van getallen wordt ook bepaald door de bewerking die je moet uitvoeren.

- *4 818 + 314,6*
  Hier kan je 314,6 afronden naar 300.

- *314,6 : 76,24.*
  Hier kan je 314,6 beter afronden naar 320 of 350 waarbij je steunt op gemakkelijke vermenigvuldigingen en/of delingen.

Schatprocedures
B 37

Vanaf derde leerjaar

Schattend rekenen op zich (losstaand van exacte berekeningen) is vaak heel zinvol en van praktisch nut. Vaak heb je genoeg aan een schatting en hoeft een exacte berekening niet. Soms kan het ook gebeuren dat een exacte berekening zinloos is of gewoon niet kan.

- *Om te weten hoeveel stripverhalen van ongeveer dezelfde dikte er op een rek van 1 meter kunnen, ga je na hoeveel van die strips je op een plank van 10 cm kunt zetten en je vermenigvuldigt met 10.*

- *Om de hoogte van een flatgebouw met veertien verdiepingen te schatten, maak je gebruik van je voorkennis in verband met de hoogte van één verdieping en maak je hiermee een verantwoorde schatting.*

- *Stel je even voor dat je de hoogte van het gelijkvloers nauwkeurig kan meten, bijvoorbeeld: 4,13 m.*
  De leerlingen berekenen dan 14 x 4,13 m = 57,82 m .

- *Het is duidelijk dat deze uitkomst zinloos is in deze situatie als je dit zomaar laat staan. Deze uitkomst is een benadering en de werkelijke hoogte zal waarschijnlijk tussen de 50 en de 70 m liggen. Je weet namelijk niet of elke verdieping dezelfde hoogte meet en of de 'tussenruimtes' telkens gelijk zijn.*

- *Om te weten hoeveel chocoladen beertjes er ongeveer in een assortiment snoep van 2 kg zitten, tel je het aantal beertjes in 100 g (of 50 g) en je maakt zo een gefundeerde schatting voor het gehele assortiment.*

- *Om te weten hoeveel parkeerplaatsen voor wagens ze moeten voorzien, gaan organisatoren van een popconcert na hoeveel tickets er reeds in voorverkoop zijn verkocht; uit gegevens van de vorige jaren weten ze dat ongeveer 50% van de festivalgangers met de autocar de verplaatsing doen. De overigen komen met eigen wagens; ze schatten 2 à 3 personen per wagen en dit geeft hen voldoende gegevens voor een efficiënte planning.*

- *Om te weten hoeveel mensen er ongeveer aan een betoging deelnemen, passen de ordediensten bepaalde teltechnieken toe die hen niet het exacte aantal aanwezigen maar wel een 'benaderd' aantal aangeven.*

- *Hoeveel rijstkorrels zitten er ongeveer in dit (kleine) pakje?*
  - *Mike: "Maak ongeveer vier gelijke hoopjes. Tel de korrels in één hoopje en vermenigvuldig dat resultaat met vier."*
  - *Elise: "Tel een honderdtal korrels, dat hoopje vergelijk je dan met de rest."*
  - *Evy: "Tel een klein deel en weeg dat nauwkeurig. Dan ga je na hoeveel keer dat deel in het gewogen pakje gaat."*

2.2.5 CIJFEREN

Algemeen
B45

Cijferrekenen start in het 3e leerjaar. Cijferen past bij het opereren met relatief grote natuurlijke getallen en kommagetallen met veel cijfers waarmee je niet eenvoudig en vlot uit het hoofd rekent.

Derde leerjaar

De procedures om te cijferen heten 'algoritmes'.

Cijferen ter discussie

Het cijferen zelf staat in heel wat landen ter discussie:
- "Moet je wel kunnen cijferen? Later gebruik je toch een ZRM."
- "Schattend kunnen rekenen is veel belangrijker voor je dagelijks leven."
- "Ik weet zelf niet meer hoe dat delen eigenlijk in elkaar zit."

Cijferen in dit leerplan

Dit leerplan sluit ten dele aan bij deze trend. Zo is cijferen niet de enige rekenwijze. Hoofdrekenen, schattend rekenen met ronde getallen en een passend gebruik van de ZRM vormen ongetwijfeld even belangrijke, zo niet belangrijker, rekenwijzen naast dit cijferen.

Cijferen in het leerplan

Cijferen is uitdrukkelijk in het leerplan opgenomen.

Leerlingen begrijpen de procedures om te cijferen. (B45)
Het aanleren van de cijferalgoritmes gebeurt inzichtelijk en leerlingen kunnen deze cijferalgoritmes verklaren.

Overdreven gecijfer vermijd je best. Zo ligt het voor de hand om leerlingen een ZRM te laten gebruiken bij complexe opgaven en in situaties waarbij het cijferen zelf een meer ondergeschikte rol speelt, denk bijv. aan het oplossen van een vraagstuk. Komen in een opgave alleen getallen met veel nullen voor, dan is het eerder aangewezen om voor hoofdrekenen te kiezen.

Dit leerplan beperkt het aantal en de grootte van de getallen waarmee je cijfert. Die beperkingen vind je bij elke bewerking apart.

Zinvol cijferen

Zorg ervoor dat leerlingen de techniek van het cijferen inzichtelijk begrijpen en kunnen toepassen in betekenisvolle situaties.

- *geldwaarden in euro met twee cijfers na de komma*
- *resultaten van metingen tot drie cijfers na de komma*

Waarom cijferen?

Waarom kiezen we nog altijd voor het aanleren van de techniek van het cijferen?

- Cijferen is een vaardigheid die leerlingen kennis laat maken met een abstract wiskundig proces ('algoritmiseren'). Het is zeker waardevol als leerlingen vlot kunnen cijferen zonder telkens te moeten nadenken over het gevolgde oplossingsproces. Als leerlingen dit heel vlot kunnen, heb je tijd om dit cijferen in zinvolle situaties te plaatsen.

- Cijferen heeft een maatschappelijke en een sociale waarde. Het is niet omdat dit cijferen minder gebruikelijk is dat het geen waarde meer zou hebben in de basisschool. Het is misschien een rare vergelijking, maar het is niet omdat 'schoon schrijven' wat in onbruik is geraakt dat we de leerlingen geen lessen 'schrift' meer zouden geven. Denk er aan dat cijferen een 'automatisch rekenproces' is waar velen een houvast aan hebben bij het uitvoeren van een bepaalde bewerking. Eens dat je het beheerst, kost het geen energie meer.

- Leerlingen moeten de meest geschikte rekenwijze kunnen kiezen (B52). Cijferen maakt hier deel van uit, maar is niet de ruggengraat van het rekenonderwijs. Samen met hoofdrekenen, schattend rekenen en werken met de ZRM moeten de procedures om te cijferen leerlingen voldoende vaardigheden geven om vlot te rekenen. Welke rekenwijze je kiest, is moeilijk precies af te bakenen. Zo zal je in sommige situaties (precies of benaderend) aan een ZRM voldoende hebben, in andere zal schatten voldoende zijn omdat de situatie alleen maar benaderend kan aangepakt worden en in nog andere is het zinvol om iets cijferend uit te rekenen. Je hebt namelijk niet altijd een ZRM bij de hand.

  De meest geschikte rekenwijze kiezen, heeft ook te maken met hoe jij het 'handigst' rekent. Als je fantastisch kan hoofdrekenen, geniet dat je voorkeur. Hier heb je geen materiaal voor nodig. Als je de geheugentoetsen van je ZRM beheerst, vormen ingewikkelde berekeningen geen obstakel, zoniet noteer je tussenuitkomsten. Als je de ZRM niet bij de hand hebt, cijfer je vlug op een blaadje papier.

Kenmerken van cijferen

Cijferen heeft specifieke kenmerken.

- Het is gestandaardiseerd.
  Gelijk welke opgave je krijgt, je kan altijd het algoritme dat bij die bewerking past, gebruiken volgens een vast patroon, volgens een 'standaardaanpak'.

- Het gebeurt schriftelijk.
  Je moet alles opschrijven, anders kan je niet over cijferen spreken. Cijferen gebeurt niet in je hoofd.

- Het is efficiënt.
  Eens je de techniek goed onder de knie hebt, kan je deze techniek erg efficiënt bij alle gelijkaardige opgaven toepassen.

- Het kan 'automatisch', 'routinematig' gebeuren.
  Je hoeft er niet meer bij na te denken. Het antwoord vloeit zo uit je pen.

"Cijferen, dat doe ik graag want daar moet ik niet bij nadenken."
(leerling 6e leerjaar)

- Het steunt volledig op de tientalligheid en het plaatswaardesysteem van ons talstelsel.
  Alle cijferalgoritmes zijn volledig gebaseerd op het plaatswaardesysteem en op de manier waarop we onze getallen schrijven in dat systeem.
  Cijferen is rekenen met cijfers. Je voert eenvoudige bewerkingen met cijfers uit binnen ons positioneel talstelsel.

- Het draagt bij tot attitudevorming voor netheid en nauwkeurigheid.
  Bespreek hoe je de oefeningen op het blad het beste schikt. De streep onder de bewerking trek je met een liniaal. De deelstoel teken je met

potlood, zodat de verticale streep even lang is als de staart van de deling, enzovoort.

Kolomsgewijs rekenen

Om te leren cijferen kan het handig zijn het zogenaamde kolomsgewijs rekenen te gebruiken. Ook voor zwakkere leerlingen kan dit een hulp zijn. Deze methode is een combinatiemethode, een combinatie van hoofdrekenen en cijferen. We illustreren deze aanpak bij de bespreking van de verschillende bewerkingen.

Hoofdrekenen is eigenlijk rekenen met 'getalgrootten' terwijl cijferen puur rekenen met cijfers is. Kolomsgewijs rekenen is een aanpak die ligt tussen beide methodes in. Vergeet echter niet dat dit kolomsgewijs rekenen geen cijferen is en het cijferen dus zeker niet kan vervangen.

Wanneer cijfer je?

Je cijfert als de getallen te groot of te ingewikkeld zijn om uit je hoofd te rekenen.
Eens leerlingen een algoritme beheersen, zijn ze vaak niet meer bereid om schattend te rekenen of om de oefening uit het hoofd te rekenen. Ze rekenen liever 'algoritmisch' de oefening uit want dit kan je zonder veel na te denken.

24 + 32 =
"vier plus twee is zes, ik schrijf 6,
twee plus drie is vijf, ik schrijf 5, dus 56"

Dit 'verkapt cijferen' mag je niet toelaten bij hoofdrekenen of bij schattend rekenen. Je rekent hier immers puur algoritmisch waarbij de getalgrootte geen enkele rol meer speelt.

Ga daarom niet te vlug tot 'algoritmisering' van het rekenen over. Zorg ervoor dat leerlingen steeds kunnen verwoorden wat ze aan het doen zijn en hoe ze dit cijferen aanpakken.

Cijferen is inzichtelijk te leren, maar dan mag je niet beginnen met het aanbieden van de kortste vorm. Enkel een stapsgewijze langzame groei naar de meest verkorte vorm kan ervoor zorgen dat leerlingen het geziene algoritme inzichtelijk kunnen verklaren en vlot kunnen toepassen. Kinderen die de tafels nog niet geautomatiseerd hebben, gebruiken bij cijferen een tafelkaart. Zo kunnen ook zij het cijferalgoritme inoefenen.

Hoe leer je cijferen aan?

Methodisch onderscheid je in hoofdzaak twee aanpakken: de progressieve complicering enerzijds en de progressieve schematisering anderzijds. Het kan zeker niet de bedoeling zijn om beide aanpakken aan te leren, maar je zal samen met het schoolteam een keuze moeten maken. Meestal zal die keuze bepaald zijn door de werkwijze die het gebruikte handboek voorschrijft.
We bespreken beide aanpakken in het algemeen waarbij we de leerlijn met een voorbeeld illustreren.

Progressieve complicering

Bij progressieve complicering bied je het algoritme reeds van in het begin met eenvoudige getallen aan. Nadien verken je het algoritme verder door de getallen 'moeilijker' te maken ('progressief te compliceren').

Nemen we als voorbeeld: de optelling.

Je hebt positiemateriaal (abacus, MAB-materiaal, zelfgemaakt materiaal,...) en een positiekaart bij de hand. Het manipuleren van dat positiemateriaal en het noteren gebeuren tegelijkertijd.
Niet alle stappen zijn opgenomen aangezien het enkel de bedoeling is om een mogelijke leerlijn te schetsen.

- *Zonder overschrijding*

	H	T	E
	2	4	3
+	6	3	2

- *Eenmaal overschrijden*

	H	T	E
	5	2	7
+	3	5	4

- *Tweemaal overschrijden*

	H	T	E
	3	4	7
+	1	8	6

- *Een nul in de uitkomst*

	H	T	E
	3	4	7
+	1	4	3

Eigenschappen van progressieve complicering

Progressieve complicering kenmerkt zich door:

- De gebruikte getallen worden steeds groter, 'gecompliceerder'.
- De uit te voeren rekenhandeling wordt stap voor stap complexer. Zo onderscheid je bij het voorbeeld: eerst zonder omwisselen, dan met wisselen, de nul die in de opgave verschijnt, enzovoort.
- Het algoritme is vrij technisch en verloopt erg strikt.
- Als leerkracht doe je veel voor, je demonstreert.
- Het inzicht in het algoritme gaat soms te vlug naar het toepassen van een 'trucje'.
- Je bent vrij in het kiezen van een probleemstelling waarin je het cijferwerk een plaats geeft, maar deze probleemstelling is niet essentieel. Dikwijls krijg je dan ook een louter technische benadering van dat cijferen.

Progressieve schematisering

Bij progressieve schematisering bouw je het algoritme op via een reeks 'verkortingen' waarbij het algoritme groeit naar zijn meest abstracte vorm ('progressief schematiseren').

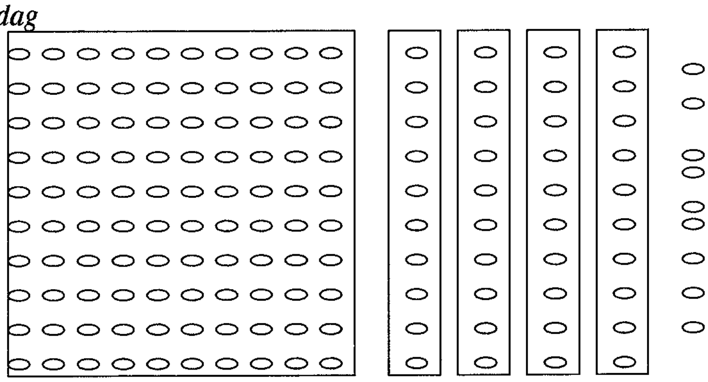
Neem als voorbeeld: de optelling.

Je hebt, net als bij progressief compliceren, positiemateriaal en een positiekaart bij de hand. Het manipuleren van dat positiemateriaal en het noteren gebeuren tegelijkertijd.

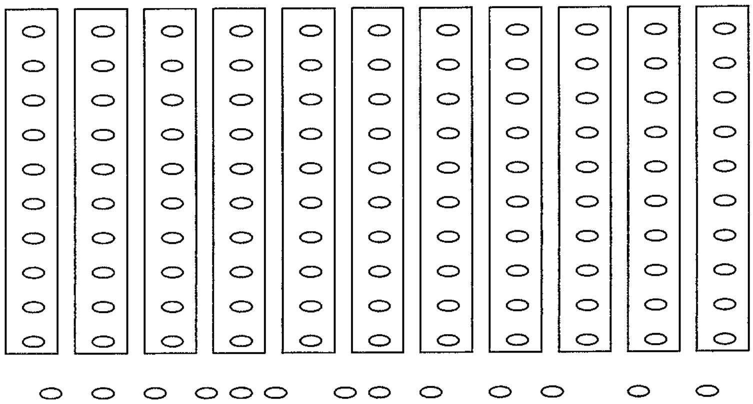
De eierboer

Eierboer Jos verpakt tien eieren in een doos (D) en elke tien dozen in een pak (P). Tien pakken samen vormen een stapel (S).
Eierboer Jos gaat elke dag tweemaal naar de veiling.
De eieren van de voor- en de namiddag staan apart.

voormiddag



namiddag



Met hoeveel eieren vertrekt boer Jos naar de veiling morgenvroeg?

De leerlingen gaan aan het werk. Zij zoeken zelf naar een manier om dit probleem aan te pakken waarbij het belangrijk is om een overzichtelijke werkwijze te krijgen. Je krijgt uiteraard verschillende aanpakken maar toch zal je de meeste oplossingswijzen grofweg in twee aanpakken kunnen indelen.

Aanpak 1

Bij een aantal oplossingswijzen merk je dat leerlingen met de globale hoeveelheden rekenen.
Zo werken ze met '100 eieren' in plaats van de verpakking in zijn geheel te zien: '1 P'. Deze oplossingswijzen gaan dan eerder in de richting van 'cijferend hoofdrekenen'.

Voormiddag:	*100*	*40*	*9*
Namiddag:		*110*	*13*

Eerst apart inpakken

Voormiddag	*100*	*40*	*9*
Namiddag		*100*	*23*
	100	*20*	*3*

Eieren samen inpakken

	100	*40*	*9*
	+ 100	*20*	*3*
	200	*60*	*12*
dus	*200*	*70*	*2*

Deze aanpak steunt op de 'grootte' van de getallen en sluit meer aan bij hoofdrekenen. Om de weg naar het algoritme te vinden, werk je in een volgende fase met een positiekaart waarbij je bijvoorbeeld 200 vervangt door 2 op de kaart.
Uiteindelijk kom je bij het bekende algoritme terecht.

Aanpak 2

Andere leerlingen werken direct met 'verpakkingen'. Het cijferen sluit hier sterker op aan. Je rekent namelijk direct met 'cijfers' en niet met 'getallen'.

1 Vul eerst de tabel aan en zoek hoeveel eieren boer Jos naar de veiling kan meenemen.

	pakken	dozen	los
voormiddag	1	4	9
namiddag	0	11	13

2 Help eerst om boer Jos zijn verpakkingen volledig te maken

	pakken	dozen	los
voormiddag	1	4	9
namiddag	0	11	13
	0	11	10 + 3
	0	11 + 1	3
	0	12	3
	0	10 + 2	3
	1	2	3

3 Nu zijn de verpakkingen volledig

	pakken	dozen	los
voormiddag	1	4	9
namiddag	1	2	3

Hoeveel eieren neemt boer Jos morgen mee naar de veiling?

	pakken	dozen	los
voormiddag	1	4	9
namiddag	1	2	3
samen	2	6	12
	2	6	10 + 2
	2	7	2

Boer Jos vertrekt morgenvroeg met 2 pakken, 7 dozen en 2 eieren naar de veiling.

Oplossingswijzen die in deze richting gaan, kan je 'stroomlijnen' naar het bekende algoritme.

Eigenschappen van progressieve schematisering

Progressieve schematisering kenmerkt zich door:

- De aanbreng gebeurt altijd via een betekenisvolle situatie en deze probleemstelling is essentieel omdat de gebruikte getallen juist hun betekenis aan de gekozen situatie ontlenen. Deze aanpak vraagt dus meer tijd.
- Je moet als leerkracht niet veel 'demonstreren', het algoritme steunt op eigen notatiewijzen van de leerlingen.
- Leerlingen groeien meer geleidelijk naar het algoritme. Het algoritme bouw je namelijk op via allerlei verkortingen. Dit kon je in het bovenstaand voorbeeld al enigszins zien.
- De leerling kan het algoritme op een 'lager' niveau toepassen om de oplossing te vinden. Het gebruikte algoritme is namelijk niet noodzakelijk direct de kortste vorm. Het gevaar bestaat dat leerlingen te lang vasthouden aan omslachtige procedures.
- Er is weinig of geen onderscheid tussen oefeningen met verschillende moeilijkheidsgraden als: zonder omwisselen, met wisselen, een nul in de opgave, ... Leerlingen die veel structuur nodig hebben en waarvoor je de leerstof heel stapsgewijs dient op te bouwen, krijgen alle moeilijkheidsgraden door elkaar aangeboden.

♦ CIJFEREND OPTELLEN

Beperkingen
B38

Leerlingen moeten maximaal vijf getallen kunnen cijferend optellen waarbij de som kleiner is dan 10 miljoen en de getallen maximaal drie cijfers na de komma hebben.

Kolomsgewijs optellen

Bij de optelling kan je een drietal fasen onderscheiden:

A	*B*	*C*
		1
463	*463*	*463*
+ 382	*+ 382*	*+ 382*
700	*5*	*845*
140	*140*	
5	*700*	
845	*845*	

Bij A reken je zo: 700 + 140 = 840, 840 + 5 = 845
Bij B reken je eerst ook zo, nadien meer cijferend.
Bij C heb je het algoritme.

Kenmerken voor het kolomsgewijs optellen:

Je rekent van 'boven' naar 'onder', zoals bij cijferen.
De 'getalgrootte' speelt in de aanvangsfase een grote rol.
Zo reken je eerst van 'links' naar 'rechts' waarbij de grootte van het getal de doorslag geeft, zoals bij hoofdrekenen.
Leerlingen die moeite hebben om tot het abstracte algoritme te komen kunnen zich behelpen met fase A. De opgave is hier herleid tot een eenvoudiger opgave met getallen met nullen die uit het hoofd op te lossen is.
Zolang je niet rekent als in fase C is een schatting ingebouwd binnen de oplossingswijze.
Bij het voorbeeld geeft 700 een eerste ruwe schatting van de uitkomst. Zo weet je dat bij deze opgave de oplossing ergens tussen 700 en 900 moet liggen en niet 70 of 7 000 kan zijn.

De eerste overgang (van A naar B) is niets anders dan een richtingverandering bij het rekenwerk. Deze richtingsverandering laat toe om uiteindelijk van 'rechts' naar 'links' te werken.

De tweede overgang (van B naar C) is de overgang van het werken met de 'getalgrootte' ('700 + 140 + 5') naar 'positiecijfers' ('2 + 3 = 5 ; 6 + 8 = 14 ; 4 opschrijven...').

Cijferend optellen met kommagetallen
B38b

Vierde leerjaar

Cijferend optellen met kommagetallen, die maximaal drie decimalen bevatten, kan pas aan bod komen als het cijferen met natuurlijke getallen goed inzichtelijk is geïntroduceerd en verwerkt.

Technisch verloopt het algoritme voor kommagetallen op dezelfde wijze als het geschetste stramien voor natuurlijke getallen.

Welke problemen kunnen zich voordoen?

De kommagetallen zijn foutief onder elkaar geschreven. Schatting en berekening liggen niet in elkaars buurt.

45,3	*Ik schat: 45 + 2 = 47*
+ 1,8	*Dat klopt niet!*
45,48	*Hoe heb je de getallen genoteerd?*

De schatting is fout aangepakt. Schatting en berekening liggen niet in elkaars buurt.

45,3	*Ik schat: 45 + 20 = 65*
+1,8	*Dat klopt niet!*
47,1	*Is je schatting juist? Kijk je afronding van de getallen na.*

De berekening is technisch juist maar bij het noteren van het resultaat liep er iets mis.

45,3	*Ik schat: 45 + 2 = 47*
+1,8	*Dat klopt niet!*
471	*Kijk naar de som en naar je schatting.*
	Heb je niets vergeten?

Beperkingen
B39

Leerlingen moeten twee getallen kunnen cijferend aftrekken waarbij het aftrektal kleiner is dan 10 000 000 en het verschil maximaal 8 cijfers bevat waarvan maximaal 3 na de komma.

Kolomsgewijs aftrekken

Kolomsgewijs aftrekken ontstaat uit 'rekenen met tekorten'.
De oorsprong van deze aanpak ligt bij Key, een kind met leermoeilijkheden dat de opgave 63 - 27 zo oploste:

63	
- 27	
40	'60 min 20 is 40.'
4 -	'3 min 7, daarvoor heb ik 4 te kort.'
36	'4 minder dan 40 is 36.'

Vergelijk deze aanpak (A) met het ons bekende algoritme (B).

A	*B*
	3 16
463	*463*
- 382	*+ 382*
100	*81*
20 -	
1	
81	

Bij A reken je zo:

- *eerst van links naar rechts:*
  400 - 300 = 100   60 - 80 is 20 tekort (-)   3 - 2 = 1
- *dan uit je hoofd:*
  100 - 20 = 80   80 + 1 = 81

Bij B reken je cijferend van rechts naar links en heb je het algoritme.

Kenmerken kolomsgewijs aftrekken

Kenmerken voor het kolomsgewijs aftrekken:

Je rekent van 'boven' naar 'onder', zoals bij cijferen.
De 'getalgrootte' speelt in de aanvangsfase een grote rol.
Zo reken je eerst van 'links' naar 'rechts' waarbij de grootte van het getal de doorslag geeft, zoals bij hoofdrekenen.
Leerlingen die moeite hebben om tot het algoritme te komen, kunnen zich behelpen met fase A. De opgave is hier herleid tot een eenvoudiger opgave met getallen met nullen die uit het hoofd op te lossen is.
Zolang je rekent in fase A is een schatting ingebouwd binnen de oplossingswijze.

Bij het voorbeeld geeft 100 een eerste ruwe schatting van de uitkomst.

De overgang van A naar B betekent eerst en vooral een richtingverandering bij het rekenwerk. Deze richtingsverandering laat toe om uiteindelijk van 'rechts' naar 'links' te werken zoals we bij ons algoritme gewoon zijn.

Naast deze richtingsverandering is ook een overgang van het werken met de 'getalgrootte' ('100 - 20 + 1') naar 'positiecijfers' ('3 - 2 =...').

B45

Het is minder voor de hand liggend in vergelijking met de optelling om een leerlijn vanuit dit kolomsgewijs aftrekken uit te werken die uitmondt bij het bekende algoritme.
Het inzicht verwerven dat dit kolomsgewijs aftrekken overeenkomt met het bekende algoritme van de aftrekking verruimt zeker het begrijpen van ditzelfde algoritme.

Een aangepaste verwoording kan hier zeker helpen:

'3 - 2 = 1
6T - 8T, daarvoor heb ik 2 te kort, ik wissel 1H om:
16T - 8T = 8T
nu heb ik 1H minder.'

Aftrekkingen met 'nullen'

Nogal wat leerlingen hebben problemen bij oefeningen waarbij één of meer nullen in het aftrektal voorkomen. Uiteraard kunnen rekenfouten vergissingen van het moment zijn, maar als bepaalde handelingen consequent verkeerd uitgevoerd worden, is het van het grootste belang om zo'n systematische denkfouten op te sporen en te analyseren. Pas dan kan je op een zinvolle wijze deze rekenproblemen aanpakken.
Een drietal voorbeelden van 'systematische' fouten:

A	B	C
506	506	506
- 129	- 129	- 129
477	327	423

- *Bij oplossing A weet de leerling dat bij een 'nul' een 'negen' moet komen bij het inwisselen maar hij weet niet meer van waar die komt.*

- *Bij oplossing B wisselt de leerling direct om vanuit de honderdtallen omdat er geen tientallen zijn.*

- *En bij oplossing C maakt de leerling kolomsgewijs gewoon het verschil van het grootste en het kleinste cijfer.*

B45

Zulke fouten wijzen op te weinig inzicht in de procedure van de aftrekking. Leerlingen die bepaalde foute rekenhandelingen consequent blijven uitvoeren, moeten terug op 'concreet' niveau aan de slag. Haal je plaatswaardemateriaal terug boven, laat de oefening leggen en let vooral op het inwisselen.

Fouten bij het inwisselen

Geef leerlingen die veel 'inwisselfouten' maken de raad om eerst in te wisselen voor ze beginnen met cijferen. De opgave kan je dan herschrijven als:

4 9 16
506
- 129

En pas nu begin je te cijferen.

'Veel' nullen

Aftrekkingen met 'veel' nullen in het aftrektal geven dikwijls problemen. Hier is het zeker handig om vooraf het inwisselen uit te voeren zoals in het voorbeeld hierboven.

Lien heeft nog maar 7 563 km met haar wagen gereden.
Elke 10 000 km krijgt een auto een inspectiebeurt.
Hoeveel km kan Lien nog afleggen voor ze naar de garage moet?

$$\begin{array}{r} {\scriptstyle 9\;9\;9} \\ {\scriptstyle 10\,10\,10\,10} \\ 1\;0\;0\;0\;0 \\ \underline{-\quad 7\;5\;6\;3} \end{array} \quad \textit{of} \quad \begin{array}{r} {\scriptstyle 9\;\;9\;\;9\;10} \\ 1\;0\;0\;0\;0 \\ \underline{-\quad 7\;5\;6\;3} \end{array}$$

Je wisselt eerst in:
1 TD wissel ik om in 10 D, ik neem 1 D eraf, dat wissel ik om in 10 H, ...
Voer nu de aftrekking uit.

Cijferend aftrekken met kommagetallen
B39b

Vierde leerjaar

Cijferend aftrekken met kommagetallen, die maximaal drie decimalen bevatten, kan pas aan bod komen als het cijferen met natuurlijke getallen goed inzichtelijk is geïntroduceerd en verwerkt.
Technisch verloopt het algoritme voor kommagetallen op dezelfde wijze als het geschetste stramien voor natuurlijke getallen.

Welke problemen kunnen zich nog voordoen?

De kommagetallen zijn foutief onder elkaar geschreven. Schatting en berekening liggen niet in elkaars buurt.

45,3	*Ik schat: 45 - 2 = 43*
- 1,8	*Dat klopt niet!*
45,12	*Hoe heb je de getallen genoteerd?*

De schatting is fout aangepakt. Schatting en berekening liggen niet in elkaars buurt.

45,3	*Ik schat: 45 - 20 = 25*
- 1,8	*Dat klopt niet!*
43,5	*Is je schatting juist? Ga na hoe je de getallen hebt afgerond.*

De berekening is technisch juist maar bij het noteren van het resultaat liep er iets mis.

45,3	*Ik schat: 45 - 2 = 43*
- 1,8	*Dat klopt niet!*
435	*Kijk naar het verschil en naar je schatting.*
	Heb je niets vergeten?

Beperkingen
B40

Leerlingen moeten twee getallen cijferend kunnen vermenigvuldigen waarbij het product maximaal 8 cijfers bevat.

De weg naar het algoritme van de vermenigvuldiging
B40a

Om inzichtelijk bij het uiteindelijke algoritme te raken moeten de leerlingen verschillende fasen doorlopen.
Vertrek van vermenigvuldigingen waarbij de vermenigvuldiger een natuurlijk getal kleiner dan 10 is.

Aanpak 1

Een eerste benadering vertrekt vanuit de betekenis van een vermenigvuldiging als een 'herhaalde keer- handeling'.
Hierbij kan je een drietal stadia onderscheiden:

A	B_1	*of*	B_2	*C*
275	275		275	275
275	x 5		x 5	x 5
275	25		1000	1375
275	350		350	3 2
+ 275	1000		25	
25	1375		1375	
350				
1000				
1375				

Bij de eerste fase A leg je duidelijk de band tussen de optelling en de vermenigvuldiging. De vermenigvuldiging is immers niets anders dan een verkorte herhaalde optelling.

De overgang naar stadium B is eenvoudig. Je schakelt gewoon over naar het gebruik van het maalteken. Naargelang je 'links' of 'rechts' begint krijg je fase B_1 of B_2.
Beide werkwijzen zijn goed, maar het is duidelijk dat fase B_1 directer aansluit bij het algoritme (fase C) dan fase B_2.

Bij het uiteindelijke algoritme schrijf je best wat je moet 'onthouden' onderaan. Als je in het gegeven voorbeeld '3 2' erboven schrijft, heb je meer kans op foute redeneringen als: '5 maal 7 plus 2 is 5 maal 9 of...'

Zorg ervoor dat leerlingen voldoende 'vaste grond' hebben. Dit kan alleen maar door niet te snel naar het uiteindelijk algoritme te stappen. In zo'n situatie realiseert een leerling zich niet genoeg wat hij aan het doen is.

Aanpak 2

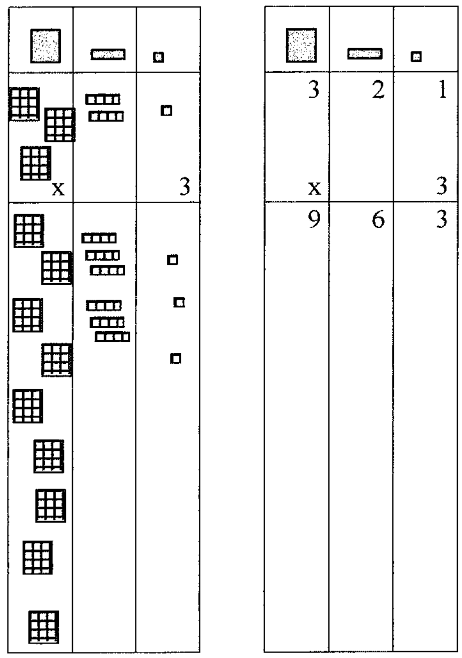
Een tweede benadering vertrekt vanuit het materialiseren van de oefening met MAB- positiemateriaal.
De weg naar het algoritme splits je in verschillende stappen op.

Niet alle stappen zijn opgenomen aangezien het enkel de bedoeling is om een mogelijke leerlijn te schetsen.

Eerst behandel je binnen het gekende getallenbereik oefeningen waarbij geen overschrijding voorkomt.

321 x 3 = .

A B

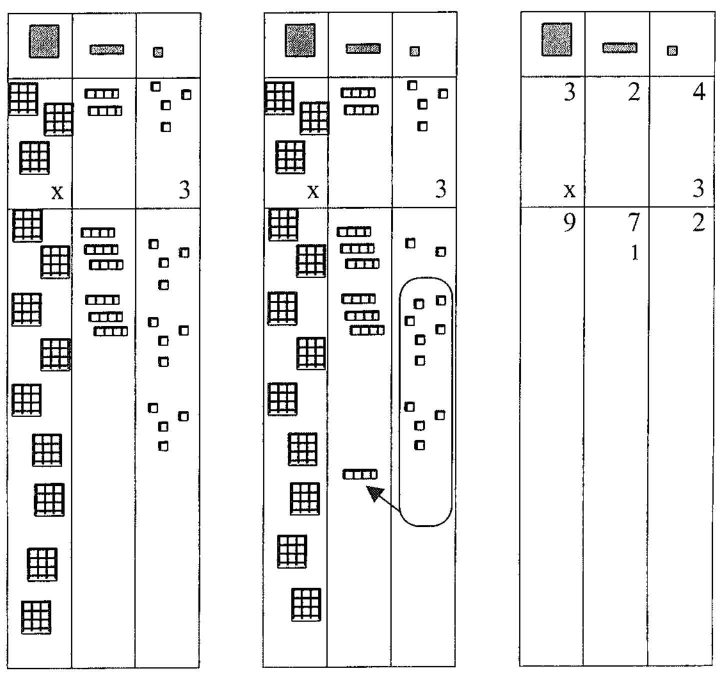


Leg de opgave met rekenblokken. (A bovenaan) Deze blokken leg je het opgegeven aantal keer. (A onderaan)
De uitgevoerde rekenhandelingen leiden tot de notatie met getallen. (fase B)

Nadien volgen oefeningen waarbij er een 'overschrijding' is van de eenheden naar de tientallen.

324 x 3 = .

A B C



Leg de opgave met rekenblokken. (A bovenaan) Deze blokken leg je het opgegeven aantal keer. (A onderaan)
Je merkt dat je meer dan tien blokjes één hebt, dus moet je inwisselen.
Je wisselt tien blokjes om voor één staaf. (fase B)
De uitgevoerde rekenhandelingen leiden tot de notatie met getallen. (fase B)

Denk bij je keuze van oefeningen aan:

- oefeningen met een 'nul' in het vermenigvuldigtal,
  204 x 2 =

- oefeningen met overschrijding van tientallen naar honderdtallen
  142 x 4 =

- oefeningen waarbij een 'nul' in het product komt.
  112 x 5 = 251 x 2 =

- oefeningen met twee overschrijdingen:
  245 x 3 =

enzovoort.

Laat veelvuldig en uitgebreid met MAB- materiaal werken. Denk niet dat het inzicht in het algoritme zonder dit materialiseren kan. Het uiteindelijk doel is niet alleen het automatisch hanteren van het algoritme, maar ook het begrijpen van het algoritme.

De vermenigvuldiger is een getal met twee cijfers
B40b

Vierde leerjaar

Oefeningen waarbij de vermenigvuldiger een natuurlijk getal kleiner dan 10 is, zijn gekend.

De leerlingen kunnen de standaardvorm van het algoritme al. De uitbreiding naar vermenigvuldigers die natuurlijke getallen kleiner dan 100 zijn, is voor de meesten niet zo moeilijk.

Een weekenduitstap met de bus naar Parijs kost 365 euro.
Er gaan 24 mensen mee.
Hoeveel ontvangt de busmaatschappij voor deze reis?

A

$$\begin{aligned} 10 \times 365 &= 3\,650 \\ 10 \times 365 &= 3\,650 \\ 4 \times 365 &= \underline{1\,460} \\ & 8\,760 \end{aligned}$$

B

$$\begin{aligned} 20 \times 365 &= 7\,300 \\ 4 \times 365 &= \underline{1\,460} \\ & 8\,760 \end{aligned}$$

C_1

$$\begin{array}{r} 365 \\ \underline{\times \quad 4} \\ 1\,460 \end{array} \qquad \begin{array}{r} 365 \\ \underline{\times \ \mathbf{20}} \\ 7\,300 \end{array}$$

C_2

$$\begin{array}{r} 365 \\ \underline{\times \ 24} \\ 1\,460 \\ \underline{7\,300} \\ 8\,760 \end{array}$$

Je kan de opgave 24 x 365 eerst oplossen via een combinatie van hoofd- en cijferrekenen. Zo splits je in fasen A en B eerst de vermenigvuldiger in eenheden en tientallen, waarna je de tussenproducten cijferend optelt.

Het hoofdrekenen dat in fasen A en B zit, kan je nu eenvoudig omzetten in cijferwerk. Dit is fase C_1.

Het onder elkaar noteren van de tussenuitkomsten levert het uiteindelijke algoritme op. (fase C_2)

Bij het uiteindelijke algoritme noteer je de tussenuitkomsten best volledig.

D_1	D_2
365	365
x 24	x 24
1 460	1 460
7 300	7 30
8 760	8 760

Het weglaten van de 'overbodige' nullen (zie fase D_2) kan later wel eens ter sprake komen maar is geen noodzakelijke laatste stap. Bedenk trouwens dat het volledig noteren van de tussenuitkomsten zeker voordelen biedt:

- *er is minder kans tot fouten maken bij het cijferend optellen;*
- *de getalgrootte is meer 'gerespecteerd', zo is in het voorbeeld 730 wel degelijk 7 300;*
- *het schattend rekenen krijgt een impuls (1 460 + 7 300 is ongeveer 2 000 + 7 000, of de uitkomst zal ruwweg in de omgeving van 9 000 zitten)*

De vermenigvuldiger is een getal met drie cijfers
B40c

De verdere uitbreiding naar vermenigvuldigingen waarvan het vermenigvuldigtal ligt tussen 100 en 1000 gebeurt volledig analoog.

Vijfde leerjaar

Beperkingen cijferend vermenigvuldigen met kommagetallen
B41

Vierde leerjaar

Cijferend vermenigvuldigen met kommagetallen beperk je zoals beschreven in dit doel: maximaal drie decimalen, het product bevat maximaal 8 cijfers.

Technisch verloopt het algoritme van de vermenigvuldiging met kommagetallen op dezelfde wijze als het geschetste stramien voor het vermenigvuldigen van natuurlijke getallen.

Welke problemen kunnen zich voordoen met kommagetallen?

- Leerlingen maken een fout bij de schatting.

45,3	*Ik schat: 450 x 10 = 4 500*
x 8	*Dat klopt niet!*
362,4	*Ligt 45,3 in de buurt van 450?*

- Er is niet geschat. De berekening is technisch goed uitgevoerd, maar bij de uitkomst is de komma vergeten.

45,3
x 8
3624 *Schat eerst je uitkomst, dan zal je merken wat je fout hebt gedaan.*

Schakel bij het cijferend vermenigvuldigen met kommagetallen niet te snel over op een techniekje om de komma te plaatsen:

'Het aantal cijfers na de komma in het resultaat is hetzelfde als de som van het aantal decimalen van het vermenigvuldigtal en de vermenigvuldiger.'

Vooraleer leerlingen dit regeltje zelf ontdekken, biedt het schatten van de uitkomst een meer inzichtelijke benadering om de komma te plaatsen. Als je de oefening schat, krijg je niet alleen een beeld over de 'ongeveer-grootte' van de uitkomst, maar weet je ook precies waar de komma moet staan.

Bied oefeningen als

25,45 x 1,256 =

waarbij een kommagetal vermenigvuldigd wordt met een ander kommagetal beperkt aan.

Het is niet eenvoudig om situaties te bedenken waarbij je zo'n rekenwerk nodig hebt.

- *Eén doos met 24 schriften kost 25,40 euro. Juf Gina bestelt anderhalve doos. Hoeveel kost dat?*

- *Volgens Testaankoop kost deze wagen 0,52 euro per kilometer als je alle kosten rekent: aankoop, verzekering, benzine, autobelasting en onderhoud. Op de kilometerteller staat 124 255,7. Hoeveel bedragen de kosten van deze wagen tot op dit moment?*

  Een bepaalde vloer aanleggen kost bij de firma Tegel 51,56 euro per vierkante meter. Hoeveel rekent deze firma voor een rechthoekige vloer van 8,5 m bij 7,3 m?

♦ CIJFEREND DELEN

Natuurlijke getallen cijferend delen
B42

Leerlingen moeten twee getallen cijferend kunnen delen waarbij het quotiënt maximaal 3 cijfers na de komma bevat.

De weg naar het algoritme van de deling

De traditionele staartdeling is een lastig algoritme. Om inzichtelijk tot het algoritme te komen, beschrijven we kort de twee aanpakken die bij de andere bewerkingen ook werden besproken: progressieve complicering en progressieve schematisering.

Aanpak 1
Delen volgens progressieve schematisering

Een eerste benadering van zulke delingen vertrekt vanuit de betekenis van een deling als een 'uitdeel- handeling' waarbij de relatie met de aftrekking sterk naar voor komt.

Twaalf leden van een sportteam gingen eten. Dat kostte in totaal 420 euro. Als iedereen evenveel betaalt, hoeveel is dat dan voor elk?

	A	
Samen	*420 euro*	
-	*120 euro*	*elk betaalt 10 euro*
	300 euro	*nog te betalen*
-	*240 euro*	*elk betaalt 20 euro*
	60 euro	*nog 60 euro te betalen met 12*
-	*60 euro*	*elk betaalt 5 euro*
	0 euro	

Elk lid van het team heeft in totaal 35 euro betaald.

Oplossingswijze A sluit aan bij eerder informele rekenhandelingen van kinderen. Zo is het 'uitdeel'- principe duidelijk te merken.

Eerst betaalt elk 10 euro, daarna 20 euro en dan merk je dat 12 keer 5 euro gelijk is aan het resterende bedrag dat nog overblijft. De oplossing is dus de som van de 'uitdelingen' 10, 20 en 5.

Hoe kom je nu tot een staartdelingschema?

B

420	*12*
- 120	*10 euro*
300	
- 120	*10 euro*
180	
- 120	*10 euro*
60	
- 36	*3 euro*
24	
- 12	*1 euro*
12	
- 12	*1 euro*
0	*35 euro*

C

420	*12*
- 240	*20*
180	
- 120	*10*
60	
- 60	*5*
0	*35*

D

420	*12*
- 360	*30*
60	
- 60	*5*
0	*35*

- Bij de eerste fase A werd meer vanuit informele rekenhandelingen en notaties van de leerlingen vertrokken.

- De overgang naar fase B is erg eenvoudig. Het informele noteren krijgt een meer gestructureerde vorm waarbij de 'staart' duidelijk de manier van redeneren 'stroomlijnt'. In deze fase is al een duidelijke differentiatie te merken bij de gehanteerde oplossingsaanpak. Zo zullen leerlingen die goed kunnen schatten de staart merkbaar kunnen verkorten en vlugger tot het antwoord komen.

- De bedoeling is dat leerlingen bij het 'uitdelen', 'verdelen', 'eerlijk delen',.. steeds grotere 'happen' nemen. Verkorting van de procedure leidt tot fase C.

- Het uiteindelijke resultaat is fase D. Je verdeelt eerst de honderdtallen maximaal: 12 gaat zeker 30 keer in 400, geen 40 keer. Nadien werk je verder met de tientallen in de rest: 12 gaat precies 5 keer in 60. Eventueel ga je nog verder met de eenheden. Zo kom je dichter en dichter bij de uiteindelijke standaardvorm van het algoritme.

Eigenschappen van het delen via de progressieve schematisering

- De 'link' met een betekenisvolle situatie is altijd aanwezig.
  Elke 'lijn' in de oplossing heeft een concrete verdelingsbetekenis.

- De 'getalgrootte' blijft belangrijk.
  Deze delingsaanpak steunt op het schattend verdelen. Zo merk je dat de hoeveelheden 420, 120 en 60 in het voorbeeld fase C niet direct opgesplitst worden in eenheden, tientallen, enzovoort maar meer globaal benaderd worden als te verdelen grootheden.

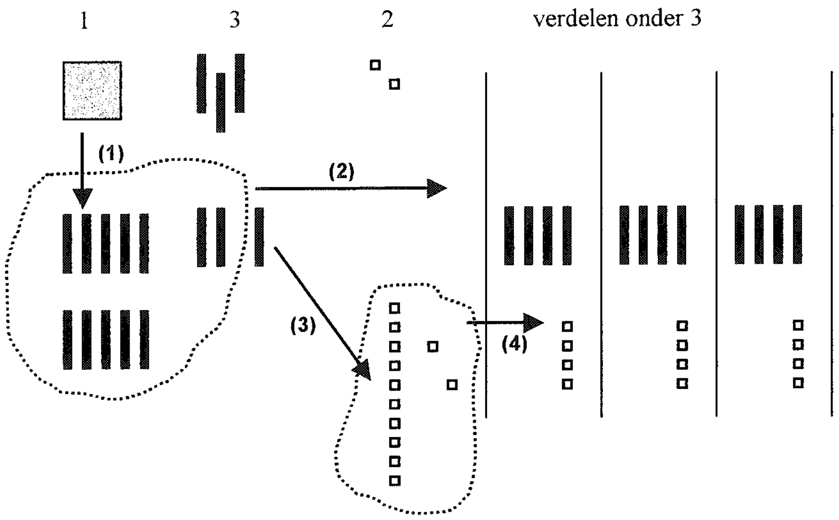
- Schatten is in de methode 'ingebouwd'.
  Het schatten van de uitkomst levert mij direct tijdswinst op. Een goede schatting laat mij sneller naar een volgende fase doorstoten. Wie bij het voorbeeld 420 : 15 een schatting maakt van 35 kan zelfs in twee lijnen de staartdeling uitvoeren.
  Deze aanpak bevordert dus zeker het schatten van de uitkomst omdat je daar nu eenmaal direct belang bij hebt. De procedure kan je er aanzienlijk mee verkorten.

- Het bekende standaardalgoritme van de deling is niet eenvoudig.
  Niet alle leerlingen die de staartdeling inzichtelijk kunnen uitvoeren zoals aangegeven bij fasen C en/of D zijn in staat om de ultieme verkorting te begrijpen en toe te passen.

Aanpak 2
Delen volgens progressief compliceren

Bij een tweede benadering vertrek je vanuit het materialiseren van de oefening met MAB- positiemateriaal.
Het deeltal leg je met kubusjes, staven, plakken, enzovoort. Dit materiaal verdeel je eerlijk.

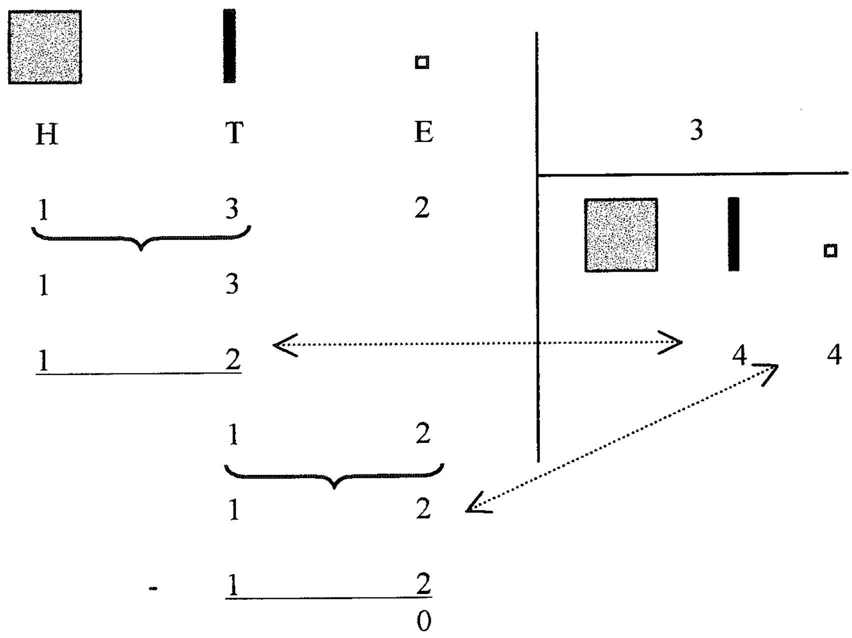
Verdeel 132 eerlijk met z'n drieën.



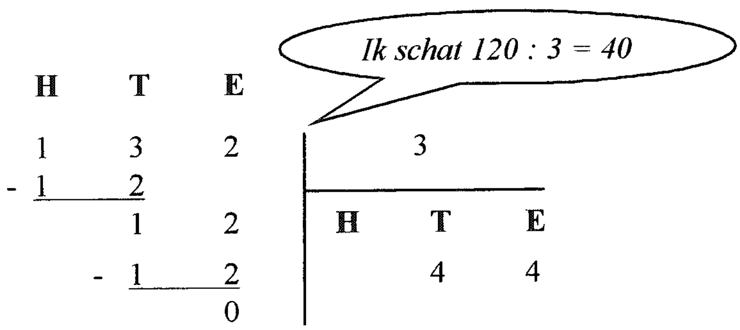
Werkwijze:

- Leg het deeltal met rekenblokken.
- De 'plak' kan je zomaar niet verdelen. Je moet ze omwisselen voor 10 staven. Drie staven, die er al lagen, voeg je erbij (1)
- Je kan 12 staven in 3 gelijke delen verdelen. Elk krijgt vier staven. (2)
- De ene staaf, die nog niet verdeeld is, wissel je om voor 10 blokjes. (3) Samen met de 2 blokjes die er nog lagen, heb je nu 12 blokjes om eerlijk te verdelen. (4)
- Het resultaat van de deling is 44.

De rekenhandelingen die bij dit manipuleren van positiemateriaal uitgevoerd worden, zet je nadien om in een schema dat dit materiaal koppelt aan de positiewaarden. (E, T, H,...)



Het materiaal verdwijnt langzaam meer en meer naar de achtergrond. De deling voer je uit via kijken en verwoorden. Tenslotte kom je bij een notatie die meer en meer lijkt op het uiteindelijke algoritme.



De verwoording die hierbij past, laat je zo goed als mogelijk aansluiten bij de 'leghandelingen'.

Eén honderdtal kan je niet in drie gelijke delen verdelen.
Wissel één honderdtal om voor 10 tientallen, dan heb je in totaal 13 tientallen. Als je 13 in drie gelijke delen deelt, dan heb je 3 keer 4 en nog 1 over. Schrijf 12 onder 13 en maak het verschil. Zo zie je dat je 1 tiental overhoudt.

Uiteindelijk beland je bij het standaardalgoritme van de deling.

Eigenschappen van het delen via de progressieve complicering

- Eerst werk je met delers met één cijfer en kleine deeltallen. Geleidelijk aan vergroot je de deeltallen, nadien de delers (toenemend 'compliceren').
- Het manipuleren met blokken geraakt op de achtergrond om langzaam volledig te verdwijnen: eerst leggen en manipuleren, dan leggen en kijken, nadien de opgave kijken, en tenslotte enkel denken (zuiver mentaal).
- Van in het begin krijg je een opdeling van het getal in eenheden, tientallen, honderdtallen, ...
- Het schatten van de uitkomst staat los van de methode. Veel leerlingen 'vergeten' dan ook het schatten omdat ze het nut ervan niet inzien. Benadruk daarom steeds opnieuw het belang van het schatten van de uitkomst om rekenfouten te voorkomen.
- De werkwijze ligt van in het begin vast en laat weinig of geen kans om andere notatievormen te ontwikkelen. Delen volgens progressieve complicering is sterk gestructureerd. Voor rekenzwakke kinderen biedt zo'n 'vast' stramien zeker voordelen.

Welke keuze?

Beide methodes hebben voor- en nadelen, hebben voor- en tegenstanders. Het is dan ook niet eenvoudig om zomaar een 'beste' keuze te maken. Maak met je schoolteam een verantwoorde keuze.
Gebruik je een handboek, dan is die keuze meestal al gemaakt door de auteurs.

De deler bestaat uit één cijfer
B42a

Derde leerjaar

Delingen van de vorm

54 : 3 =   214 : 5 =

moeten leerlingen in een derde leerjaar kunnen oplossen tot op 1 nauwkeurig. Dit betekent dat de rest van de deling het natuurlijk getal is dat overblijft nadat het deeltal zo ver mogelijk is verdeeld.

Verdeelsituaties
Rest

214 : 5 =
5 gaat 42 keer in 214, de rest is 4

Als je deze opgave in een verdeelsituatie aanbiedt, dan krijgt de rest (zie ook B44) altijd een concrete betekenis:

- *Een bepaald soort stiften verpakt men per 5.*
  Hoeveel pakjes kan je maken met 214 stiften?
  De rest 4 betekent in deze situatie dat je geen pakje meer kan maken en dat je 4 stiften overhoudt.

- *Petra betaalt 214 euro voor 4 stoelen.*
  Hoeveel kost één stoel?
  In deze situatie is het quotiënt een kommagetal. Je kan hier eigenlijk niet spreken van een rest. Je moet 42 euro en 80 cent per stoel betalen. De rest is nul.

B42b

De tweede probleemsituatie, bij het voorbeeld 214 : 5, past bij doel B42b. De niet-opgaande delingen breid je uit achter de komma door de rest, tot op 1 nauwkeurig, om te zetten in kleinere positiewaarden als tienden, honderdsten, enzovoort.

De rest 4 bij de geziene deling 214 : 5 wissel je om voor 40 tienden zodat je de deling verder kan uitvoeren bij de tweede situatie.

B42c

Vijfde leerjaar

Als de leerlingen het algoritme van de deling voldoende onder de knie hebben, levert de uitbreiding naar oefeningen als:

456 : 15 =

weinig problemen op.

Deze oefeningen laat je eerst uitgebreid leggen met positiemateriaal. De verkortingen naar de uiteindelijke staartdeling toe pak je best stap voor stap aan zodat het inzicht niet verloren gaat. Leerlingen zijn vlug geneigd om een techniek klakkeloos en zonder inzicht toe te passen.

Schatten
B 36

Vergeet zeker niet om steeds opnieuw het belang van het schatten te benadrukken:

- Schatten helpt om de grootteorde van de uitkomst te bepalen.

  Heb je geen rekenfouten gemaakt?
  De komma in het quotiënt stond verkeerd of heb je vergeten.

- Schatten kan voldoende zijn als een 'ongeveer'- oplossing, om te zien of je wel op de goede oplossingsweg zit. Nadien maak je de correcte staartdeling.

Delen door een kommagetal
B42d
Vanaf vijfde leerjaar

Oefeningen als:

45 : 0,75 =   56 : 1,5 =

zijn een belangrijke stap als voorbereiding op doel B43.
Situeer eerst zo'n opgaven in een betekenisvolle situatie:

De vader van Jules betaalt 45 euro voor een aantal identieke schriften.
Elk schrift kost precies 0,75 euro.
Hoeveel schriften heeft hij gekocht?

Ik schat: zeker meer dan 45, omdat 45 : 1 = 45 en 0,75 is minder dan 1.
45 : 0,75 = 4 500 : 75
Ik voer nu de deling uit. (B42c)

B7d

Eigenlijk vormen deze oefeningen geen echt nieuwe leerstof.
Als je inziet dat 45 : 0,75 = 4 500 : 75 dan herleid je deze oefeningen naar een vorig type. Gebruik voor dit inzicht de delingshalter:

8 000 : 200 = 40
800 : 20 = 40
80 : 2 = 40
8 : 0,2 = 40
0,8 : 0,02 = 40 (B43c)
...

Kommagetallen delen door een natuurlijk getal met één cijfer
B43a

Oefeningen als:

51,9 : 3 =

komen in betekenisvolle situaties voor. Denk bijvoorbeeld aan:

Oma koopt drie dezelfde fotoboeken voor 51,90 euro.
Hoeveel kosten deze boeken per stuk?

De breedte van de speelplaats is 51,9 m.
Hoeveel latten van 3 m heb je minstens nodig om deze breedte te overbruggen?

Op een grote ton staat een ijk. Er zit 51,9 liter wijn in deze ton.
Hoeveel kleine wijnkartons van 3 liter kan je hiermee vullen?

B7d

Om de staartdeling technisch uit te voeren werk je eerst de komma weg op dezelfde manier als bij B42d. De delingshalter herleidt deze oefening naar een opgave zonder kommagetallen:

51,9 : 3 = 519 : 30

Ik schat 60 : 3 = 20

5	1 ,	9		3 **0**
- 3	0			1 7 , 3
2	1	9		
- 2	1	0		
		9	0	
		- 9	0	
			0	

Voer het algoritme volledig uit en leg dit naast de drie probleemstellingen:

- *Oma betaalt 17 euro en 30 cent per boek, dat is duidelijk.*

- *Om de breedte van de speelplaats te overbruggen heb ik zeker 18 latten nodig. Ik merk dat het uitvoeren van de staartdeling hier toch wel een beetje absurd is. Of misschien toch niet: als ik stop bij de 'kommalijn'.*

- *Met de ton wijn kan ik maar 17 kartons van 3 liter vullen. Ook hier is de staartdeling zeker niet noodzakelijk. Schattend hoofdrekenen leidt even snel of misschien zelfs sneller naar de oplossing.*

Kommagetallen delen door een natuurlijk getal kleiner dan 1 000
B43b

Vijfde leerjaar

De verdere uitbreiding naar oefeningen als:

- *5,75 : 125 =*
  Een doos met 125 stiften kost 45,75 euro. Hoeveel is dit per stuk?

- *45,75 : 2,25 =*
  In een straat herstelt men een stuk van een rioolpijp. Dit stuk is 45,75 m lang. Men gebruikt buizen van 2,50 m die 25 cm in elkaar schuiven. Hoeveel buizen heeft men zeker nodig?

verloopt op dezelfde wijze als bij B43a.

Eerst herleid je de oefening naar een opgave zonder kommagetallen door de delingshalter te gebruiken:

- *45,75 : 125 = 4 575 : 12 500*
- *45,75 : 2,25 = 4 575 : 225*

nadien voer je de staartdeling uit en formuleer je het antwoord.

- *Bij de doos stiften:*
  Het quotiënt is 0,366, één stift kost 0,37 euro.

- *Bij de rioolpijp:*
  Het quotiënt is 20,333, je hebt zeker 21 buizen nodig.

Bied zulke opgaven zoveel mogelijk in betekenisvolle situaties aan.

Waarde van de rest bepalen
B44

Vanaf vierde leerjaar

De juiste waarde van de rest bepalen bij een niet- opgaande deling is niet eenvoudig.
Eerst heb je de wiskundige benadering van de restbepaling. Nemen we als voorbeeld de deling:

220 : 30 =
het quotiënt is 7, de rest is 10 want 30 x 7 + 10 = 220

De rest is het deel dat overblijft, dat je niet meer kan verdelen.
Maar uiteraard kan je de rest 10 hier nog verder verdelen door de rest verder op te delen in tienden, honderdsten, enzovoort. Dit noemt men ook 'verder cijferen na de komma'.

Neem 45,75 : 2,25 = 4 575 : 225 met als staartdeling

Ik schat 46 : 2 = 23

4	5,	7	5		2,25
- 4	5	0			20,3
		7	5		
		-	0		
		7	5	0	
		- 6	7	5	
			7	5	

Als je deelt tot op 1 nauwkeurig is het resultaat:
Het quotiënt is 20 ; de rest is 0,75.

Nogal wat kinderen hebben de neiging om als rest 75 te nemen. Dit is niet verwonderlijk omdat ze denken dat de logica van de delingshalter die geldt voor deler en deeltal ook geldt voor de rest. Maar dit is duidelijk niet het geval:

2020 : 200 = 202 : 20 = 20,2 : 2 = 10,1
- *het quotiënt van 2020 : 200 is 10,1; de rest is 20.*
- *het quotiënt van 202 : 20 is 10,1; de rest is 2.*
- *het quotiënt van 20,2 : 2 is 10,1; de rest is 0,2.*

Het is dat ook van in het begin belangrijk om een soort 'kommalijn' bij het algoritme van de deling te gebruiken. Deze kommalijn laat toe om de waarde van de rest te zien.

- *Als je 45,75 deelt door 2,25 tot op 0,1 nauwkeurig, dan is het quotiënt 20,3 en de rest 0,075.*

- *Als je 45,75 deelt door 2,25 tot op 0,01 nauwkeurig, dan is het quotiënt 20,33 en de rest 0,0075.*

Een controle kan je altijd uitvoeren als volgt:

- *20 x 2,25 + 0,75 = 45,75*
- *20,3 x 2,25 + 0,075 = 45,75*
- *20,33 x 2,25 + 0,0075 = 45,75*

Naast deze wiskundige benadering van de rest die verbonden is met de nauwkeurigheid van delen heb je ook de interpretatie van de rest als de opgave aan een probleemsituaties is gekoppeld.

We hernemen even de opgaven uit B43a:

51,9 : 3 =

- *Oma koopt drie dezelfde fotoboeken voor 51,90 euro.*
  Hoeveel kosten deze boeken per stuk?
  In deze situatie is het quotiënt 17,30 en de rest is 0.
  Er is geen rest omdat je' alles' kan verdelen.

- *De breedte van de speelplaats is 51,9 m.*
  Hoeveel latten van 3 m heb je minstens nodig om deze breedte te overbruggen?
  Je maakt de deling tot op 1 nauwkeurig.
  Het quotiënt is 17 en de rest is 0,6. De rest geeft hier aan dat je een lat extra nodig hebt. De deling verder uitvoeren heeft geen betekenis.

- *Op een grote ton staat een ijk. Er zit 51,9 liter wijn in deze ton.*
  Hoeveel kleine wijnkartons van 3 liter kan je hiermee vullen?
  Je maakt de deling tot op 1 nauwkeurig.
  Het quotiënt is 17 en de rest is 0,6. De rest geeft hier aan dat je te weinig wijn hebt om een achttiende karton te vullen.

Het is dus aangeraden dat leerlingen bij een probleemstelling waar het algoritme van de staartdeling aan bod komt eerst nadenken op welke wijze het algoritme moet uitgevoerd worden:

- Is het wel nodig om te cijferen?
  Zou ik niet beter schattend hoofdrekenen?
- Hoe nauwkeurig moet ik delen?
  Tot op de eenheid, tot op 0,1;...
- Wat is de betekenis van de rest?

Inzicht in de cijferprocedures

Derde leerjaar

Het leerplan vraagt uitdrukkelijk dat leerlingen de procedures om te cijferen inzichtelijk zouden begrijpen. Bij de bespreking van de verschillende algoritmes werd hier in voorgaande bladzijden uitgebreid op ingegaan.

Enkele aandachtspunten:

- Situeer cijferen in betekenisvolle situaties.
  Vermijd cijferen om te cijferen.

- Maak steeds een schatting:

  ✓ *Een schatting geeft je een idee van de grootteorde van het quotiënt.*
  ✓ *Bij een schatting moet je meer nadenken. Cijferen is een automatisme. Daarom maken veel kinderen geen schatting.*
  ✓ *Een schatting gebeurt ruim en mag bij iedereen verschillend zijn.*
  ✓ *Nauwkeurig schatten kan in veel gevallen voldoende zijn.*

- Groei langzaam naar het algoritme.
  Werk en verwoord op basis van inzicht in de tientalligheid:

476 : 23 =

✓ *Eerst uitgebreid leggen met positiemateriaal. (MAB)*
✓ *Uitgebreid verwoorden volgt hier op:*
"4H kan je niet in 23 gelijke delen verdelen, wissel om voor 40T en voeg er 7T bij; 47T daar kan 23 juist 2 keer in; nu heb je 1T over; dat weet je als je het verschil maakt."
✓ *Verkorten in de verwoording:*
"4H in 23 delen gaat niet, 44T in 23 delen is 2T en 1T over, 1T wisselen voor 10E."
✓ *Uiteindelijk beland je bij de bekende, meest verkorte vorm.*

- Besteed aandacht aan de betekenis van termen als deeltal, deler, quotiënt, rest, factoren, product,...in probleemsituaties.

Controleren van de uitgevoerde bewerkingen
B46

Hier worden drie manieren opgesomd die leerlingen op het einde van de basisschool moeten beheersen om een bewerking, die cijferend is uitgevoerd, te controleren.

Schatten
B46a

Derde leerjaar

Het gemakkelijkste om een ruwe controle uit te voeren is het vergelijken van de uitkomst met de vooraf gemaakte schatting.
Als schatting en resultaat te ver uit elkaar liggen, is de kans op een rekenfout groot.

$$\begin{array}{r} 420 \\ \underline{+59} \\ 1\,010 \end{array} \quad \textit{Schatting: } 400 + 60 = 460\textit{, waar zit de fout?}$$

$$\begin{array}{r} 4,5 \\ \underline{+\ 51,7} \\ 562 \end{array} \quad \textit{Schatting: } 4 + 50 = 54\textit{, komma vergeten!}$$

De omgekeerde bewerking uitvoeren bij optellen en aftrekken

B46b

Vierde leerjaar

Als je de omgekeerde bewerking uitvoert bij de optelling en de aftrekking kom je terecht bij de 'uitgangspositie'.

$$\begin{array}{r} 452 \\ \underline{+\ 123} \\ 575 \end{array} \quad \textit{Controle:} \quad \begin{array}{r} 575 \\ \underline{-\ 123} \\ 452 \end{array}$$

Zo'n controle is zeker nauwkeuriger dan het maken van een schatting. Anderzijds vraagt deze manier van controleren meer tijd. Bij elke optelling en aftrekking de omgekeerde bewerking maken kan niet.

Controleren met de zakrekenmachine
B46c

Vanaf vierde leerjaar

Het gebruik van de ZRM als controle-instrument is de meest efficiënte vorm om een algoritme te controleren.
De ZRM rekent automatisch alles correct uit, op voorwaarde natuurlijk dat je alle toetsen in de juiste volgorde foutloos hebt ingedrukt.

2.2.6 De zakrekenmachine gebruiken

De zakrekenmachine (ZRM)
B47

Vanaf vierde leerjaar

De ZRM krijgt een aanzet in het vierde leerjaar.
Dit betekent dat op sporadische momenten een kennismaking met de ZRM in de klas aan de orde is. Zo laat je eerst eenvoudige oefeningen maken op de ZRM om leerlingen deze machine te leren kennen. Nadien laat je nu en dan de ZRM gebruiken bij probleemsituaties waar de klemtoon meer ligt op het kunnen oplossen van het probleem dan op de cijfermatige oplossing.

Vanaf het vijfde leerjaar gebruik je de ZRM meer gericht, onder meer om uitgevoerde bewerkingen te controleren.

Het rekenen van een eenvoudige zakrekenmachine

De ZRM is een handig hulpmiddel. Het kan echter niet alle problemen bij het (leren) rekenen oplossen.

Eenvoudige rekenmachines voeren alleen maar bewerkingen uit die op een 'standaardmanier' zijn ingevoerd. Zo'n rekenmachine laat niet zien hoe zij zelf rekent.
Meer gecompliceerde rekenmachines, zoals de TI-80, laten wel toe om de hele berekening op het venster te zetten vóór de uitkomst. Deze rekenmachines zijn meer bedoeld voor het secundair onderwijs. Er staan te veel toetsen op.

Criteria

Enkele criteria waaraan een goede ZRM voor de lagere school dient te voldoen:

- *Kan zowel op zonne-energie als op batterijen werken.*
- *Heeft handige toetsen:*
  cijfers, geheugentoetsen, procenttoets (%) en constante factor.
- *Is niet te groot en 'stevig' verpakt.*
- *Heeft een duidelijk afleesbaar scherm.*
- *Groepeert cijfers per drie.*

Alle leerlingen van de klas beschikken best over dezelfde ZRM.
Alleen als je wilt nagaan hoe een zakrekenmachine precies werkt, laat je best verschillende soorten ZRM gebruiken.

De ZRM: een slimme of een domme rekenaar?

'De ZRM is gewoon een domme rekenaar.'

Deze uitspraak is waar, maar ook niet waar.
Enerzijds voert een zakrekenmachine blindelings ('dom') de ingevoerde commando's uit. Anderzijds rekent zo'n ZRM ontzettend snel en efficiënt ('slim').

Flexibele oplossingen

Denk niet dat een ZRM niet flexibel te gebruiken is. Ook met een ZRM kan je bepaalde opgaven op verschillende manieren aanpakken en oplossen. Dit stimuleert het probleemoplossend denken en het hanteren van flexibele oplossingswijzen.

Wat verdien je na een weddenverhoging van 1,37 % bij een wedde van 12 150 euro?

Controleer volgende oplossingswijzen met jouw ZRM.
Welke rekenwijzen zijn correct?

Welke zou jij kiezen?

AC 12 150 : 100 = 121,50 en dan x 1,37
AC 12 150 x 0.0137 + 12 150
AC 12 150 + 1.37 %
AC 12 150 x 1.37 % en dan + 12 150
AC 12 150 M+x 1.37 % M + MR
AC 1.37 : 100 dan + 1 en dan x 12 150
AC 1.37 % 12 150
AC 12 150 x 101,37
AC 12 150 x 101,37 %

Heb je moeite om zelf met de ZRM te werken, neem dan eerst het deel 'Hoe rekent de ZRM?' door.

Het feit dat je als gebruiker van de ZRM 'verlost' bent van het precieze en tijdrovende gecijfer laat toe dat je meer zoekt naar verschillende oplossingswijzen en dat je kan experimenteren. Dan wordt de ZRM een instrument dat tot creatief denken kan leiden.

De ZRM als controlemiddel bij optellen, aftrekken en vermenigvuldigen

De ZRM is een krachtig controlemiddel bij het cijferen. Zeker bij het optellen, het aftrekken en het vermenigvuldigen is een controle met de ZRM vlug en efficiënt.

Controleer volgende opgaven met de ZRM:

- *'Elke dag steek ik 20 cent in een spaarpot.*
  Hoeveel heb ik na precies één jaar?'
  365 x 20 cent = 73 000 cent = 730 euro

- *'Mama tankt dieselbrandstof.*
  Op de pomp staat: 0,61 euro 60,95 l
  Hoeveel moet ze precies betalen?
  0,61 euro x 60,95 = 371 765 euro. (Hoewel je hier eigenlijk weet dat zo'n uitkomst niet kan.)

De ZRM als controlemiddel bij delen

Bij de deling is het gebruik van de ZRM zeker interessant omdat de controle van het resultaat je verplicht om de bewerking zelf beter te begrijpen.

- *Hoe controleer ik de staartdeling 4 586 : 26 = q 176 rest 10?*
  176 x 26 = 4 576
  4 576 + 10= 4 586

- *Hoe vind ik de rest bij de deling 4 586 : 26 = ?*
  In het venster staat 176,38461
  Het quotiënt q is 176. Trek 176 af want de decimalen na de komma vormen de restwaarde van de deling door 26. De rest vind je door deze restwaarde terug te vermenigvuldigen met 26 en dit levert afgerond 10.

Hoe rekent de ZRM?

Wie met een ZRM werkt, komt soms voor allerlei verrassingen te staan. Ze hebben zo hun eigenaardige trekjes. Zo kan je conflicten krijgen tussen het 'gewone' rekenwerk en die van de ZRM. Het verkennen van de mogelijkheden van de ZRM die men heeft, is dan ook erg belangrijk om die ZRM te laten uitrekenen wat jij precies wilt.

Een ZRM voert bewerkingen stap per stap uit en denkt niet na over de wiskundige volgorde.
Merk op dat niet alle ZRM op dezelfde manier rekenen. Zo kunnen de aangegeven rekenwijzen bij uw ZRM afwijken van de gegeven voorbeelden.

= toets

Je moet niet altijd de toets '=' indrukken om het resultaat af te lezen. Zo kan de '+'- toets soms voldoende zijn.

% toets

Procenten uitrekenen met de '%'- toets werkt anders dan in de ons vertrouwde rekenaanpak.

75% van 168
Deze oefening kan men intoetsen als:
75 : 100 x 168 of als 0.75 x 168

Maar het kan ook anders via gebruik van de percenttoets:
Tik de bewerking 168 x 75 in, onmiddellijk gevolgd door de % toets.
Op het scherm verschijnt het resultaat 126.

Geheugentoetsen
M+ toets
M- toets
MR toets
MC toets

Het gebruik van deze toetsen biedt mogelijkheden om bepaalde resultaten van oefeningen op te slaan en nadien bijvoorbeeld te vermeerderen of te verminderen met resultaten van een nieuwe bewerking.

- *(135 + 187) - (63 + 88) =*

  Tik in 135 + 187 = ; op het scherm verschijnt 322.
  Plaats dit getal in het geheugen van het toestel door toets M+ in te drukken.
  Vervolgens tik je 63 + 88 = ; op het scherm verschijnt 151.
  151 moet worden afgetrokken van 322 daarom verminderen we dit getal van het geheugen met de toets M-.
  Om de oplossing van deze opgave te zien druk je op MR. Op het scherm verschijnt de uitkomst 171.
  Als de bewerking is beëindigd, druk je op MC om het geheugen te wissen.

- *(135 + 187) x (63 + 88) =*

  Tik in 135 + 187 = ; op het scherm verschijnt 322.
  Druk M+; nu zit 322 in het geheugen.
  Tik in 63 + 88 = ; op het scherm verschijnt 151.
  Nu tik je 'x' gevolgd door M+ en je hebt het product.

- *Voor de deling (135 + 187) : (63 + 88) kan je niet zomaar in de gewone rekenrichting beginnen.*

  Tik in 135 + 187 = ; op het scherm verschijnt 322.
  Druk M+; nu zit in het geheugen 322.
  Tik in 63 + 88 = ; op het scherm verschijnt 151.

Als je nu ':' tikt gevolgd door M+, dan deel je 151 door 322, en dat is niet de bedoeling.
Je lost dit op door de deler in het geheugen te zetten:
Tik in 63 + 88 = ; op het scherm verschijnt 151.
Druk M+; nu zit in het geheugen 151.
Tik in 135 + 187 = ; op het scherm verschijnt 322.
Nu tik je ':' gevolgd door M+, en je hebt het quotiënt.

Constante factor

De zogenaamde 'constante factor' is in praktisch alle ZRM ingebouwd en activeer je door de '=' - toets meer dan één keer achter elkaar in te drukken.

'Al spelend' kun je heel wat ontdekkingen doen.

- *3 x 7 = 21*
  3 x 7 = = 147
  3 x 7 = = = 1029

- *7 x 3 = 21*
  7 x 3 = = 63
  7 x 3 = = = 189

- *7 + = 14*
  7 + = = 21
  7 + = = = 28

Rekenen met en zonder de ZRM

Je zal de verwondering van de leerlingen opmerken als je hen volgende eenvoudige oefeningen eerst laat oplossen uit het hoofd en nadien met de ZRM.

- *1 + 2 x 3 =*
- *2 x 3 + 1 =*
- *10 - 1 - 1 - 3 x 2 =*
- *4 x 5 - 5 x 4 =*

Volgorde van bewerkingen bij de ZRM

Een verklaring voor de verschillen in de uitkomsten is vlug gevonden. Een eenvoudige ZRM rekent in volgorde van links naar rechts en houdt geen rekening met de volgorde van bewerkingen. (Meer gesofisticeerde types doen dit wel.)

- *5 + 2 x 3 = 5 + 6 = 11... in de rekenles*
- *5 + 2 x 3 = ...'5' + '2'...7...'x' '3'...21... met de ZRM*

Afkappen of afronden?

Bij volgende opgave is het mogelijk dat, naargelang het type ZRM verschillende uitkomsten verschijnen:

- *1 : 3 x 3 = 1 in de rekenles*
- *1 : 3 x 1 = ...? met je ZRM*

  - *= 0.99999999*
    De uitkomst is 'afgekapt'. Bij de meeste ZRM worden de cijfers van de getallen die buiten het afleesvenster vallen niet onthouden. Zo geeft 1 : 3 als resultaat 0,33333333 waarna vermenigvuldiging met 3 : 0,99999999 geeft.

- *= 1*
  Sommige ZRM geven de correcte afronding.
- *= 0.11111111*
  De opgave is opgelost als 1 : (3 x 3)

Beperking van de getalgrootte

Neem de opgave:

- *2 222 222 x 2 222 222 =*
  cijferen...4 938 270 617 284
  met de ZRM: 49382.706 E of 4.93827^{12}

Het getal kan niet in het afleesvenster en de ZRM geeft meestal een aantal beduidende cijfers van de oplossing die in het venster kunnen. Tevens kapt de ZRM de oplossing af.

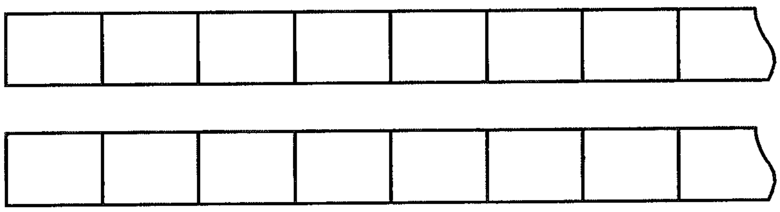
Voor leerlingen kan het een uitdaging zijn om een oefening als:
2 222 222 x 2 222 222 = op te lossen door een combinatie te maken van hoofdrekenen, cijferrekenen en werken met de ZRM.
Zo leren ze dat elke rekenwijze voor- en nadelen heeft.

De opgave:

50 000 000 x 2 =
heeft verschillende uitkomsten naargelang de manier waarop de ZRM rekent: E 1.0000000 of 1.0000000 E 8 of ...
Meestal verschijnt een letter E om aan te geven dat de uitkomst te groot is om op het afleesvenster te zetten.

Rekenstrook

Het gebruik van een rekenstrook kan handig zijn.



Je begint met het eerste vakje links en noteert in volgorde de toets van de ZRM die je indrukt in elk vakje. Zo ontstaat een rekenstrook.

Reken uit volgens de rekenstrook.

2	:	3	(=)	x	2,78	=	

2,78	:	3	(=)	x	2	=	

2,78	x	2	(=)	:	3	=	

2,78	M+	:	3	(=)	M-	MR	

3	:	3	(=)	x	1	=	

1	:	3	(=)	x	3	=	

Naargelang het type ZRM kan dit volgende verrassende resultaten leveren:

1.8533331
1.8533332
1.8533333
1.8533334
1
0.9999999

Leer je leerlingen om de gevolgde rekenwijze met de ZRM op een rekenstrook te noteren. Hiermee kan je handig verschillende oplossingswegen vergelijken en krijg je zicht op het gevolgde rekenproces.

Handleiding ZRM- map

Laat sommige rekenwijzen en 'ontdekkingen' op bladen met rekenstroken zetten en berg dit op in een 'ZRM- map'. Leerlingen kunnen deze map vrij raadplegen en aanvullen. Zo kan je bijvoorbeeld rekenstroken aanmaken met als titel:

- *Hoe reken ik een oefening als (45 + 21) - (21 x 3) uit?*
- *Hoe reken ik 18% van 3 200 uit?*
- *Hoe bereken ik de omtrek van een cirkel met straal 4 cm?*
- *Hoe bereken ik het gemiddelde van de getallen 14, 12, 21 en 56?*

Inzicht in de structuur van getallen en in de eigenschappen van de bewerkingen
B 48

Vanaf vijfde leerjaar

De ZRM kan je inzetten om bepaalde wiskundige relaties te ontdekken of om je meer bewust te worden van bepaalde wiskundige relaties.

$\boxed{3}$ $\boxed{4}$ $\boxed{:}$ $\boxed{x}$ $\boxed{-}$ $\boxed{=}$

- *Gebruik enkel bovenstaande toetsen.*
  Kies een getal en probeer dit in het venster te krijgen.
- *Kevin kiest 11 en vult de rekenstrook in:*

3	x	3	+	4	-	3	+	4	-	3	

Kevin verwoordt achteraf dat je met deze toetsen elk getal kunt bereiken. (een mooie 'ontdekking')

- *Saar doet een andere ontdekking:*

44	-	33	=	

- *Terwijl Jeroen iets anders vindt:*

3	x	3	x	3	-	4	-	4	-	4
-	4	=								

- *Reken 123 456 789 x 9 uit met je ZRM en reken nadien 123 456 789 x 72 cijferend uit.*

- *Reken uit met de ZRM:*

$$\frac{1}{2} + \frac{1}{4} =$$

$$\frac{4}{10} + \frac{2}{10} =$$

- *Zoek bij 3/4 gelijkwaardige breuken*

$$\frac{3}{4} \quad \frac{.}{8} \quad \frac{.}{12} \quad \frac{.}{16} \quad \frac{.}{20} \quad \frac{.}{24}$$

Maak met je ZRM van deze breuken kommagetallen.
Wat merk je op?

- *Reken uit met je ZRM en probeer het 'geheim van de komma' te vinden*
  57 x 215   0,57 x 215   57 x 21,5   5,7 x 2,15
  5,7 x 215   57 x 2,15   57 x 0,215   0,57 x 2,15

- *Welke uitkomst krijg je?*

2	+	1	=	=	=	...					
2	+	10	=	=	=	...					
2	+	100	=	=	=	...					

- *Zo dicht mogelijk...*
  Kies drie cijfers uit de rij 2 3 5 7 8
  en maak er een getal van drie cijfers van.
  Vermenigvuldig dit getal met 7.
  Probeer zo dicht mogelijk bij 5 000 te komen.
  - *Gert 7 x 735 = 5 145*
  - *Fien 7 x 723 = 5 061*
    Fien wint!

Rekenspelletjes

Zinvol gebruiken

De ZRM is zeker een bron van nieuwe rekenspelletjes. Het wordt ook mogelijk om bepaalde oefeningen aan te pakken die zonder ZRM eigenlijk 'ondoenbaar' zijn. De ZRM zinvol gebruiken houdt ook in dat leerlingen zich van de beperkingen van hun ZRM bewust worden.

- *Meester Wim vertelt uit het boek 'De telduivel'.*
  De telduivel keek hem vriendelijk in de ogen.
  "Kijk, ik zal je laten zien hoe je met alleen enen alle getallen kunt maken. Neem je rekenmachientje maar..."
  Meester Wim schrijft op het bord.
  Heel wat leerlingen beginnen spontaan te rekenen...

1 x 1 = 1
11 x 11 = 121
111 x 111 = 12 321
1 111 x 1 111 = 1 234 321
11 111 x 11 111 = 123 454 321
111 111 x 111 111 = ?

De leerlingen zijn erg enthousiast en controleren nog eens alle berekeningen. Meester Wim richt de aandacht op het vraagteken. Wat zou hier moeten staan?
Ik weet het ... 12345654321
Ik denk het ook Margriet, maar ben je wel zeker?

Tijdens de bespreking is het duidelijk dat de meeste leerlingen de systematiek zien, maar wel twijfelen of de lijst wel 'doorloopt'. De meester maakt de twijfel nog wat groter met volgende vraag: En wat gebeurt er bij 1 111 111 x 1 111 111?

De leerlingen gaan in groepjes zitten en zoeken samen naar een oplossing. Het hoofdrekenen met grote getallen met eindnullen komt veel aan bod en de ZRM wordt dikwijls opzij geschoven, want ze heeft duidelijk haar beperkingen.

[Idee naar Hans Magnus Enzensberger, De telduivel,
De Bezige Bij, 1998, ISBN 90 234 8149 6]

- *Hoe kan je met zo weinig mogelijk toetsen een rij van natuurlijke getallen in het venster krijgen?*

0	+	*1*	=	=	=	...					

1	+	=	=	=	=	...					

De tweede oplossing is duidelijk gewonnen!

- *'Voorspel' de uitkomst en reken uit.*

16	-	*4*	=	=	=	=					

100	*M+*	*16*	*x*	*4*	=	*M-*	MR				

- *Woorden maken.*
  Toets eerst in, draai nu je ZRM om en lees het woord.

7	3	8	3	7	7	3	7				

Maak nu zelf de woorden:
'Esso' - ' zes' - 'is'

2.2.7 TOEPASSINGEN

Betekenisvolle situaties

Betekenisvolle situaties vormen het uitgangspunt bij het aanleren van de bewerkingen (zowel met natuurlijke getallen, breuken, kommagetallen en percenten).
Bekijk je de ontwikkelingsdoelen en eindtermen vanuit het begrip 'betekenisvolle situaties' dan is het opvallend hoe dikwijls hier naar verwezen wordt.

- 'in concrete situaties'
- 'concrete voorbeelden geven bij...'
- 'voorbeelden uit hun eigen leefwereld'
- 'in een zinvolle context'
- 'in verband brengen met betekenisvolle situaties'
- 'reëele situaties'
- 'ontdekken in de realiteit'

Leerplantekst blz. 25

Betekenisvolle situaties en opgaven voor het wiskundeleren zijn situaties (spelsituaties, probleemsituaties...) die een wiskundige vorm kunnen krijgen. Dat wil zeggen dat ze aanvankelijk nog niet in wiskundetaal gesteld zijn, maar dat ze binnen wiskunde (in engere zin) gehaald kunnen en moeten worden, vooraleer er wiskundige procedures toegepast worden. Betekenisvolle situaties en opgaven kunnen variëren van uit-het-leven-gegrepen situaties tot min of meer gepolijste, voorbewerkte situaties.

- *In het kleuteronderwijs kan dit bijvoorbeeld betekenen dat bij een constructieactiviteit met verschillende soorten houten blokken allerhande wiskundige begrippen aan de orde komen: de vorm van de blokken en van de toren, het verband tussen de hoogte van de toren en de wijze waarop de blokken gestapeld worden, de stevigheid (stabiliteit) van de toren en de vorm van de toren...*

- *In het lager onderwijs kan het plaatsen van een zoekertje in de krant allerlei wiskundige vragen en procedures uitlokken: hoe bereken je de prijs van het zoekertje, wat is de voordeligste manier om het te plaatsen, is de verkoop de prijs van een zoekertje waard, enzovoort.*

Door heel het basisonderwijs heen en in alle fasen van een leergang

In een kwaliteitsrijk wiskundeonderwijs spelen betekenisvolle situaties en opgaven altijd een rol. Zowel door heel het basisonderwijs heen, als in de begripsvormende en in de toepassingsfase van een reeks lessen over een bepaald onderwerp (deelleergang).
In het kleuteronderwijs sluiten de begripsvormende en de toepassingsfase dicht op elkaar aan. Zo groeien bij kleuters bijvoorbeeld de begrippen over het vermeerderen en verminderen van hoeveelheden altijd in zeer concrete (toepassings)situaties. Maar ook in het lager onderwijs, waar meer tijd besteed wordt aan wiskundige modellen en technieken, komen betekenisvolle situaties en opgaven niet louter als toepassingen achteraf voor.

Een gevarieerd en zorgvuldig gekozen opgavenaanbod

Wie een wiskundig begrip of wiskundige techniek slechts aan één soort van situatie heeft leren koppelen, zal die achteraf vaak niet herkennen en niet vlot kunnen toepassen in andere situaties. Er zit een meerwaarde in een gevarieerd en zorgvuldig gekozen opgavenaanbod in de klas.
[leerplan blz. 25]

Rekenmoeilijkheden

Vermijd bij toepassingen 'bezwarende rekenmoeilijkheden'. Het gaat vooral om het begrijpen van de situatie.

Stimuleer leerlingen om op een zo zelfstandig mogelijke manier tot een juiste oplossing te komen, de oplossingswijze en de oplossing te interpreteren en te toetsen aan de realiteit.

Standaardopgaven
Typevraagstukken
Probleemsituatie

Uiteraard blijft het kunnen oplossen van zogenaamde standaardopgaven (typevraagstukken) belangrijk. Meestal ligt de klemtoon bij zo'n opgaven niet op het zelf ontdekken van een mogelijke oplossingswijze maar op het toepassen van een rekentechniek.
Het verschil tussen een standaardopgave en een probleemsituatie is echter niet altijd duidelijk. Immers bij om het even welk wiskundig probleem worden er allerlei veronderstellingen gemaakt die, wanneer men daar zou van afzien, het opgebouwde wiskundig model op de helling zetten.

Jan legt drie appels op de schaal en Saar legt er vier bij.
Hoeveel appels liggen op de schaal?
Bij deze 'standaardopgave' spelen een aantal dingen geen rol:
Kleur van de appels.
Gewicht van de appels.
Smaak van de appels.
Soort appels...
Deze niet-essentiële aspecten kunnen bij andere vragen wel een rol spelen. Omdat in rekenlessen het 'kwantitatieve' praktisch altijd de hoofdrol speelt, realiseren we ons meestal niet dat ook bij standaardopgaven 'veronderstellingen' worden gemaakt.

Wiskundigen en andere wetenschappers negeren voortdurend bepaalde aspecten van de realiteit. Maar in tegenstelling met leerlingen doen zij dit meestal 'bewust'. Je kan hier oeverloos over discussiëren, maar veel belangrijker is:

"The realisation that acts of modeling are taken place, that different models are possible, and that these are open to debate'.

Of in het Nederlands: (vrij vertaald)
"Dit betekent dat zowel leerkracht als leerlingen zich realiseren dat men een situatie 'verwiskundigt', dat verschillende wiskundige modellen mogelijk zijn en dat over die keuze kan gediscussieerd worden."

Domeinoverschrijdende doelen

Het leerplan vraagt expliciet dat leerlingen:
- wiskundige problemen leren oplossen
- wiskundige leertaken leren aanpakken
- leren communiceren over wiskunde
  [leerplan blz. 83 - 85]

Deze domeinoverschrijdende doelen bouw je geleidelijk op en zijn niet te herleiden tot het toepassen van enkele rekentechnieken.

De nadruk verschuift meer van de 'ene juiste oplossing' vinden naar het 'leren oplossen' van vraagstukken en problemen.

Zo is het bijvoorbeeld niet nodig om alle vraagstukken volledig uit te 'cijferen'. Als je de klemtoon legt op het 'proces' i.p.v. op het 'product', mag je tevreden zijn als leerlingen op een voldoende vaardige manier de oplossingsweg kunnen schetsen.

Krachtlijnen

Bij het 'leren oplossen' van vraagstukken pas je de principes toe die in 'Deel 1 - Krachtlijnen' van het leerplan worden besproken:

- de actieve inbreng van de leerlingen
- het inzichtelijk en probleemoplossend werken
- kansen tot zelfreflexie (metacognitieve vaardigheden)
- een realiteitsbetrokken karakter
- oog voor zorgverbreding en differentiatie
- ruimte voor verantwoorde foutenanalyses met remediëring

[leerplan blz. 9 - 38]

Wiskundige problemen leren oplossen
DO1

De domeinoverschrijdende doelen die in het leerplan vermeld staan onder 5.2.1 'Wiskundige problemen leren oplossen' krijgen volop aandacht. [leerplan blz. 83]

Algemene strategie bij probleemoplossen

Als leerlingen voor relatief complexe situaties worden geplaatst die in één of meer aspecten verschillen van de gekende situaties (bijv. standaardopgaven) dan is het zoeken naar de meest geschikte oplossingsweg de eerste stap. Zij moeten een 'wiskundig probleem leren oplossen'. Hiervoor moet je een aantal stappen zetten. Denk hierbij ondermeer aan:

- het herkennen van de noodzakelijke denkstappen om tot een oplossing te komen
- het correct omzetten van relaties tussen de gegevens en denkstappen in een (de) passende bewerking(en)
- het bijsturen van het oplossingsproces
- het controleren en interpreteren van het resultaat
- het toetsen van het antwoord aan de realiteit

Deze stappen zijn te onderscheiden maar niet te scheiden. Zo kan het zijn dat je je aanpak bijstuurt nadat je de oplossing hebt getoetst aan zijn realiteitswaarde, maar het kan ook zijn dat je je aanpak bijstuurt terwijl je aan het oplossen bent. Dit zal eerder gebeuren wanneer je in groep een probleem aanpakt, dan wanneer je het individueel oplost.

Zoekstrategieën ontwikkelen
DO2

Door zoeken, gissen, missen en kritisch bijsturen van je aanpak en de aanpak van anderen bij het oplossen van wiskundige problemen ontwikkel je een arsenaal 'zoekstrategieën' (heuristieken). Een aantal hiervan vind je opgesomd op blz. 83 van het leerplan.

Denk niet dat leerlingen 'zoekstrategieën' zomaar uit zichzelf ontwikkelen. Bij de meeste leerlingen moet je als leerkracht meestal wijzen op de meerwaarde van sommige aanpakken. Doe dit echter niet vooraf in de zin van:

- *Maak een tekening bij het tweede vraagstuk, anders vind je de oplossing niet.*
- *Let op bij de derde opgave, er zit een addertje onder het gras!*
- *Lees goed want bij één opgave moet je eigenlijk niet rekenen.*

Wijs meer nà het oplossen, tijdens de klassikale bespreking, op het voordeel van het gebruik van bepaalde zoekstrategieën:

- *Heb je gemerkt dat Klaas door een tekening te gebruiken de oplossing beter zag?*
- *Koen, jij begint altijd direct te rekenen, maar als je goed had gelezen dan had je misschien gemerkt dat het ook zonder kon.*
- *Wie kan uitleggen waarom je bij dit vraagstuk niet moest rekenen?*

Vergeet echter niet dan de meeste kinderen zoekstrategieën niet zomaar uit zichzelf ontwikkelen. Schakel daarom lesmomenten in waarin je bepaalde zoekstrategieën klassikaal aanbrengt en inoefent.
Het volgende vraagstuk werd voorgelegd aan een vijfde leerjaar:

De overzetboot in Oostende wordt geladen met 28 vrachtwagens, 35 auto's en 9 fietsen. Hoe oud is de kapitein?

Het vraagstuk werd klassikaal gegeven zonder commentaar. De leerlingen mochten niets vragen en mochten niet overleggen. Het bleek dat praktisch alle leerlingen 72 jaar als oplossing hadden. (De som van de getallen) Slechts een paar leerlingen zagen het zinloze van de vraag in. Bij de nabespreking voelden ze zich 'gefopt'.

- *We zitten toch in de rekenles, juf! Dus moet er gerekend worden.*
- *Ja, ik wist dat wel, maar ik telde toch maar op.*
- *Het kan toch, alhoewel de kapitein dan al op pensioen zou zijn.*
  [getuigenis van leerkracht tijdens de nascholing: 'Probleemoplossend denken in de bovenbouw', schooljaar 1999-2000]

Opgavenaanbod

Uiteraard is het belangrijk om je opgavenaanbod goed te kiezen. Een goedgekozen vraagstuk leidt leerlingen als het ware 'als vanzelf' naar de goede zoekstrategie.

'Nieuwe' problemen

Je hoeft ook niet altijd 'nieuwe' probleemstellingen aan te bieden. Zo is het best mogelijk dat je bij het aanbieden van vraagstukken diezelfde reeks opnieuw gebruikt om een bepaald doel na te streven.

Denk onder meer aan:

- de vraag opzoeken, herformuleren en noteren en daarbij eventueel de maateenheid van het antwoord doen aanduiden
- bij samengestelde vraagstukken de 'tussenvragen' stellen (opsplitsen in deelproblemen)
- de stappen aanduiden in het oplossingsproces
- laten opzoeken en noteren van hetgeen nodig is om tot het gevraagde eindresultaat te komen
- een visuele voorstelling verwoorden en daarbij oplosbare vragen laten vinden, formuleren en noteren

- de mogelijkheid onderkennen om zelf een grafische voorstelling, een tabel, een grafiek... op te stellen
- opzoeken, formuleren en noteren van rekenkundige gegevens die men voor de oplossing nodig heeft (er zijn gegevens te veel of te weinig)
- de relatie tussen gegevens onderkennen en verwoorden
- die relatie omzetten in de passende bewerking
- een tekening maken, is een vlugge schets voldoende, moet de tekening nauwkeurig zijn, moeten de afmetingen er zeker bij?

Nadenken over eigen oplossingsproces en dat proces sturen.
DO3

Werken aan 'leren leren' betekent niet alleen het kunnen toepassen van een algemene oplossingstrategie en het kunnen gebruiken van passende zoekstrategieën, maar betekent vooral het kunnen reflecteren over het gevolgde oplossingsproces. Wie in staat is om kritisch zijn eigen aanpak te evalueren en bij te sturen is 'lerende'. Dit 'nadenken over' of 'reflecteren' is de motor van het denken.
Leerlingen nemen veel zienswijzen en ideeën van leerkrachten over.

- *Als een leerkracht vindt dat bij elk vraagstuk precies één oplossing hoort en geen vraagstukken aanbiedt met meerdere mogelijke oplossingen, dan zal een leerling dit ook zeggen en denken.*
- *Als een leerkracht nooit vraagstukken geeft waar verschillende aanpakken mogelijk zijn, dan zal een leerling denken dat de oplossingsweg bij elk vraagstuk op voorhand vast ligt.*
- *Als een leerkracht nooit laat schatten, dan zullen leerlingen schatten blijven zien als een ballast.*
- *Als een leerkracht verwacht dat op elke vraag altijd precies één correct antwoord volgt, dan zullen leerlingen in de war raken bij vragen waar meerdere oplossingen / oplossingswijzen mogelijk zijn of waar geen antwoord mogelijk is.*

Greer en Verschaffel
Geen ervaringskennis gebruiken

Uit de studies van Greer (1993) en Verschaffel (1994) bleek dat de aanpak van de overgrote meerderheid van 10 tot 14- jarige leerlingen bij het modelleren en oplossen van problematische wiskundige toepassingsproblemen erop neerkomt dat ze 'gewoon' een of meerdere standaardbewerkingen uitvoeren met de getallen uit de opgave, zonder rekening te houden met hun ervaringskennis omtrent de reële, concrete situatie waarop het vraagstuk betrekking heeft.

Aspecten van de realiteit

Nieuwe onderzoekingen werden opgezet om een beter zicht te krijgen op de denkprocessen die hieraan ten grondslag liggen.
Een eerste reeks studies liet zien dat verbale tussenkomsten die leerlingen er in algemene termen toe aan zetten om alert te zijn, om rekening te houden met aspecten van de realiteit, en/of om ook alternatieve antwoorden te overwegen, niet of nauwelijks leidden tot een daling van het aantal niet-realistische reacties.

Specifieke aanwijzingen

Enkel wanneer dergelijke algemene waarschuwingen aangevuld werden met of vervangen werden door meer specifieke aanwijzingen viel een beduidende, maar nog steeds bedroevend matige, toename van het aantal realistische reacties te constateren.

Authentieke situatie

In een tweede reeks vervolgonderzoekingen werden een of meerdere problematische vraagstukken aangeboden in een meer authentieke situatie.
Men vertrok van de oorspronkelijke vraag uit het onderzoek:

450 soldaten moeten per bus naar het oefenterrein vervoerd worden. Hoeveel bussen zijn er nodig, als je weet dat er 36 soldaten in één bus kunnen?

- *Een eerste benadering: 20 zesdeklassers losten een variant van dit busprobleem als vraagstuk op.*

- *Een tweede benadering: Dezelfde leerlingen mochten per telefoon minibussen bestellen om de leerlingen van hun klas naar het schoolfeest te vervoeren.*

Terwijl het bussenprobleem in de schoolse context slechts door 2 van de 20 leerlingen juist beantwoord werd, antwoordden 16 leerlingen correct in de tweede situatie.
De tweede situatie is dus meer 'authentiek'.
Dit bleek dus een veel effectievere interventie te zijn want zij leidde wel tot een betekenisvolle toename van het aantal realistische reacties.

Buitenschoolse werkelijkheid

Uit sommige studies bleek dat leerlingen zich wel bewust zijn van het feit dat zij zich anders gedragen wanneer zij een rekenvraagstuk aangeboden krijgen, dan wanneer zij in de buitenschoolse realiteit met een probleem worden geconfronteerd.

Volgens verscheidene auteurs dient de oorzaak toegeschreven te worden aan de praktijk en de cultuur van het traditionele vraagstukkenonderwijs. De bemoedigende resultaten van het onderzoek van Verschaffel laat zien dat het mogelijk is om andere houdingen aan te leren.

Didactisch contract

De oorzaak van de sterke neiging van leerlingen tot niet-realistisch antwoorden op de problematische items is te vinden in het zogenaamde 'didactisch contract'.
Leerlingen laten zich in hun oplossingsgedrag - bewust of onbewust - leiden door een 'didactisch contract'. Dit schrijft voor hoe de leerlingen zich moeten gedragen, hoe ze moeten denken en praten tijdens deze lessen, hoe ze op een taak, een vraag of een tussenkomst van de leerkrachten dienen te reageren.... Voor vraagstukken houdt dit onder meer in:

- een vraagstuk beantwoord je exact getalsmatig
- een vraagstuk kan je slechts op één manier oplossen
- de correcte oplossing vind je door één of meer bewerkingen uit te voeren op de getallen die uitdrukkelijk in de tekst gegeven staan
- het is niet toegestaan om de gegevens of het gevraagde ter discussie te stellen, noch om bij het oplossen van de opgave rekening te houden met informatie die niet uitdrukkelijk in de probleemformulering 'gegeven' is.

Didactische aanpak
Modelleringperspectief

Verschaffel en andere auteurs houden een pleidooi voor een wiskundedidactiek die sterk doordrongen is van het zogenaamde modelleringperspectief:

- confronteer je leerlingen met een gevarieerd en authentiek (échter) opgavenaanbod,
- bied ruimte voor het verwoorden van aanpak, denkbeelden en opvattingen,

- bespreek met je leerlingen wat men verstaat onder een 'goed' vraagstuk, een 'goede' oplossing, een 'goede' oplossingsmethode,
- integreer deze aanpak in je wiskundeonderwijs

Betekent dit nu dat er voor de eenvoudige, klassieke rekenvraagstukken helemaal geen plaats meer is en dat leerlingen voortdurend gestimuleerd moeten worden om op zoek te gaan naar aspecten van de probleemsituatie die de toepasbaarheid van een onderliggend wiskundig model kunnen hypothekeren?

Als je een plank van 6 meter in 2 gelijke delen zaagt, hoe lang zijn beide delen dan?

Bij dit vraagstuk begint Rino te twijfelen. Alle leerlingen rond hem hebben als oplossing: 2 planken van 3 m, maar verleden week hielp hij zijn papa met 'zagen' en zijn papa vertelde Rino over de breedte van de zaagsnede. In werkelijkheid kan je nooit 2 planken van 3 m precies zagen.

Neen, er zullen steeds momenten blijven waarin men leerlingen aan de hand van eenvoudige probleemsituaties bovenal inzicht wil laten verwerven in een bepaalde wiskundige bewerking of formule en/of enige vaardigheid wil laten ontwikkelen in het gebruik ervan.

En dan blijft de helft van een plank van 6 m een plank van 3m.

[VERSCHAFFEL L., DE CORTE E., LASURE S., Realistisch modelleren van problematische wiskundige toepassingsopgaven op de basisschool, Pedagogische Studiën, 1999, 76, 183 - 200]

Enkelvoudige vraagstukken
B49

Een enkelvoudig vraagstuk is een vraagstuk dat met één denkstap opgelost wordt.

Eerste leerjaar

Jan heeft vijf appels, Mieke heeft drie appels.
Hoeveel appels samen?

Onderlinge verschillen

Eenvoudige vraagstukjes verschillen op tal van punten van elkaar en die kenmerken kunnen alle op één of andere (min of meer subtiele) wijze het oplossingsproces beïnvloeden:

- het aantal en de grootte van de getallen,
- de aard van de onbekende grootheid,
- het al dan niet voorkomen van overbodige en misleidende gegevens in de opgavetekst,
- het al dan niet aanwezig zijn van zogenaamde sleutelwoorden (bij, weg, af...),
- de aanbiedingswijze: mondeling of schriftelijk; al dan niet vergezeld van een figuur,
- de plaats van het vraagje in de opgavetekst: vooraan of achteraan,
- de lengte van de opgavetekst,
- de taalkundige complexiteit van de opgavetekst.

- *Er zijn 6 kinderen en 3 stoelen.*
  Hoeveel kinderen zijn er meer dan er stoelen zijn?

- *Er zijn 6 kinderen en 3 stoelen.*
  Hoeveel kinderen hebben er geen stoel?

Het is duidelijk dat de tweede vraag makkelijker te beantwoorden is dan de eerste.

Categorisering van enkelvoudige vraagstukken over optellen en aftrekken

Een categorisering van enkelvoudige rekenproblemen die je kan oplossen met één enkele optelling of aftrekking kan gebeuren in drie grote categorieën.
[VERSCHAFFEL, L. & DE CORTE, E., Naar een nieuwe reken/wiskundedidactiek voor de basisschool en de basiseducatie, STOHO, Acco, 1995]

Veranderingssituaties

Ik had 20 euro en krijg 3 euro bij.
Hoeveel euro heb ik nu?

Een veranderingssituatie is iets dynamisch: er gebeurt iets waardoor de starthoeveelheid verandert naar de eindhoeveelheid.

Combinatiesituaties

Bij een combinatiesituatie vertrek je van twee afzonderlijke hoeveelheden die samen een derde totaalhoeveelheid vormen.

In mijn broekzak zit 15 euro. Ik vind in mijn portefeuille 17 euro.
Hoeveel euro is dat samen?

De twee hoeveelheden voeg je niet echt samen. Er is geen verandering gebeurd.

Vergelijkingssituaties

In vergelijkingssituaties gaat het om twee afzonderlijke hoeveelheden die je onderling vergelijkt en waarbij het verschil tussen beide een rol speelt.

Ik heb 24 euro en mijn broer heeft 7 euro meer.
Hoeveel euro heeft mijn broer?

Categorisering is niet eenduidig

We merken bij deze indeling op dat het niet altijd duidelijk is waar je een concreet vraagstuk moet situeren.

Gisteren bakte de bakker 45 broden en vandaag 42.
Hoeveel broden is dat samen?

Dit vraagstuk kan je interpreteren als een combinatievraagstuk, maar ook als een veranderingsvraagstuk.

Soorten optel- en aftrekopgaven

Een categorisering, zoals daarnet vermeld, komt tot 14 types van optel- en aftrekopgaven.

Verandering

1 *Piet heeft 3 appels, An geeft Piet 5 appels bij.*
  Hoeveel appels heeft Piet nu?

2 *Piet heeft 8 appels. Hij geeft 3 appels aan An.*
  Hoeveel appels heeft Piet nu?

3 *Piet heeft 3 appels. An geeft Piet wat appels bij. Nu heeft Piet 8 appels. Hoeveel appels heeft An aan Piet gegeven?*

4 *Piet heeft 8 appels. Hij geeft wat appels aan An. Nu heeft Piet 3 appels. Hoeveel appels heeft hij aan An gegeven?*

5 *Piet heeft wat appels. An geeft Piet 3 appels bij. Nu heeft Piet 8 appels. Hoeveel appels had Piet eerst?*

6 *Piet heeft wat appels. Hij geeft 3 appels aan An. Nu heeft Piet 5 appels. Hoeveel appels had Piet eerst?*

Combinatie

7 *Piet heeft 3 appels. An heeft 5 appels.*
Hoeveel appels hebben Piet en An samen?

8 *Piet heeft 3 appels. An heeft ook wat appels. Piet en An hebben samen 8 appels. Hoeveel appels heeft An?*

9 *Piet heeft 3 appels. An heeft 8 appels.*
Hoeveel appels heeft An meer dan Piet?

10 *Piet heeft 8 appels. An heeft 3 appels.*
Hoeveel appels heeft An minder dan Piet?

Vergelijking

11 *Piet heeft 3 appels. An heeft 5 appels meer dan Piet. Hoeveel appels heeft An?*

12 *Piet heeft 8 appels. An heeft 3 appels minder dan Piet. Hoeveel appels heeft An?*

13 *Piet heeft 8 appels. Hij heeft 5 appels meer dan An.*
Hoeveel appels heeft An?

14 *Piet heeft 3 appels. Hij heeft 5 appels minder dan An.*
Hoeveel appels heeft An?

De makkelijkste zijn opgave 1, 2 en 7. Vergelijkingsvraagstukken zijn een stuk moeilijker.

Categorisering van enkelvoudige vraagstukken over vermenigvuldigen en delen
B50

De zojuist vermelde categorisering van eenvoudige optel- en aftrekopgaven is vooral gebaseerd op de relatie(s) tussen de bekende en onbekende hoeveelheden in de opgavetekst.

Voor vermenigvuldigings- en delingsopgaven kan je een categorisering maken waarbij je vooral kijkt naar de betekenis van de bewerking in de opgavetekst.

Gelijke groepen

In deze eerste categorie gaat het om vraagstukken waarbij je een aantal groepen neemt, met in elke groep precies evenveel dingen.

- Vermenigvuldiging

Drie kinderen hebben ieder 4 appels.
Hoeveel appels hebben ze samen? (3 x 4 = 12)

• Deling (door vermenigvuldiger)

Twaalf appels worden eerlijk verdeeld onder 3 kinderen. Hoeveel krijgt ieder? (12 : 3 = 4)

• Deling (door vermenigvuldigtal)

Aan hoeveel kinderen kan je 4 appels geven, wanneer je in het totaal 12 appels hebt. (12 : 4 = 3)

Vergelijking

Je vergelijkt twee hoeveelheden waarbij termen vallen als: "drie keer meer", "vier keer minder", ...

• Vermenigvuldiging

Piet heeft 12 knikkers. Jan heeft 3 keer zoveel knikkers als Piet. Hoeveel knikkers heeft Jan? (12 x 3 = 36)

• Deling (door vermenigvuldiger)

Jan heeft 36 knikkers. Hij heeft er 3 keer zoveel als Piet. Hoeveel knikkers heeft Piet? (36 : 3 = 12)

• Deling (door vermenigvuldigtal)

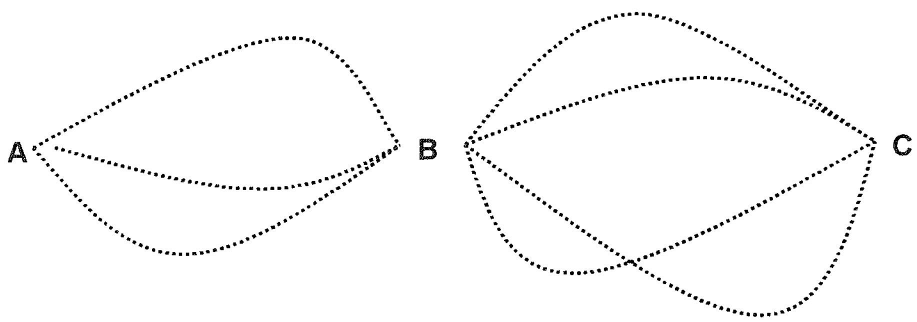
Piet heeft 12 knikkers. Jan heeft 36 knikkers. Hoeveel keer meer knikkers als Piet heeft Jan? (36 : 12 = 3)

Combinatie

Combinatorische problemen zijn van een heel andere soort dan de vorige opgaven.

• Vermenigvuldiging

Van stad A naar stad B lopen er 3 wegen en van stad B naar stad C 4. Op hoeveel verschillende manieren kan je van stad A naar stad C rijden? (3 x 4 = 12)



• Deling

Van stad A naar stad B lopen er 3 wegen. Als je weet dat je op 12 verschillende manieren van stad A naar stad C kunt rijden, hoeveel wegen leiden er dan van stad B naar stad C? (12:3 = 4)

Rechthoekmodel

Een rechthoekig patroon of model leidt ook tot vermenigvuldigen en delen.

- Vermenigvuldiging

  Een rechthoekig stuk karton heeft een lengte van 12 cm en een breedte van 6 cm.
  Bereken de oppervlakte van dit stuk karton. (12 x 6 = 72)

- Deling

  Bij een rechthoekig stuk vloer tel je 24 vierkante tegels in 4 rijen.
  Hoeveel tegels liggen op elke rij? (24 : 4 = 6)

Categorisering is niet eenduidig

Ook hier is de categorisering niet altijd duidelijk.
Neem het vraagstuk

's Morgens kan Miek kiezen tussen drie soorten broodjes en vier soorten beleg: confituur, choco, hagelslag of kaas.
Hoeveel keuzes kan ze maken?

Dit vraagstuk kan je interpreteren als een gelijke groepen- model:

vier soorten beleg op de eerste keuze van brood,
vier soorten beleg op de tweede en derde keuze van brood,

of als een combinatieopgave:

een broodje van de eerste soort met vier soorten beleg,
een broodje van de tweede en derde soort met vier soorten beleg,

of zelfs als een rechthoekopgave: (een tabel met 'dubbele ingang')

teken drie soorten broodjes boven elkaar,
teken vier soorten beleg naast elkaar,
teken nu alle mogelijkheden.

Waarom categoriseren?

Het belangrijkste nut van zo'n indelingen zit vooral in het beeld dat ze geven i.v.m. de verschillende verschijningsvormen van de basisbewerkingen in enkelvoudige toepassingssituaties.

Een gevarieerd aanbod

Leerlingen moeten een gevarieerd aanbod vraagstukken krijgen. Het is zinvol om na te gaan of ze geconfronteerd worden met zoveel als mogelijk verschillende vormen die in de beschreven categorisering aan bod kwamen. Als leerlingen alleen maar bepaalde opgaventypes krijgen, dan zullen ze veel moeite hebben om aan andere situaties de wiskundige bewerking te koppelen.

Stop je lessen niet vol met probleemstellingen. Zorg er wel voor dat een voldoende gevarieerd opgavenaanbod waarbij je de categorisering niet uit het oog verliest die de rode draad is doorheen al je lessen.

Samengestelde vraagstukken
B51

Een samengesteld vraagstuk is een vraagstuk waarbij meer dan één denkstappen nodig zijn om de oplossing te bereiken.

Jan heeft vijf appels, Mieke heeft er drie meer.
Hoeveel appels hebben ze samen?

Kettingvraagstuk

Een mogelijke tussenschakel is het 'kettingvraagstuk' waarbij je het samengesteld vraagstuk opsplitst in twee (of meer) enkelvoudige vraagstukken door bijkomende vragen te formuleren:

Jan heeft vijf appels, Mieke heeft er drie meer.
Hoeveel appels heeft Mieke?
Hoeveel appels hebben ze samen?

Merk op dat we liever de term 'denkstappen' gebruiken dan de term 'bewerkingen', omdat een goede 'wiskundige denker' de twee denkstappen in één bewerking kan uitvoeren:

Samen hebben ze $5 + (5 + 3) = .$
of rechtstreeks: $5 + 8 = .$

Geen categorisering

Een categorisering van samengestelde vraagstukken is eigenlijk ondoenbaar. Er zijn zoveel verschillende types en zoveel verschillende vormen dat elke indeling een stuk mank loopt.

Aanbevelingen

We zetten wel een aantal aanbevelingen op een rijtje. Enkele hiervan kwamen al ter sprake.
Leerlingen moeten uitgedaagd, geprikkeld worden om aan de slag te gaan, om 'problemen' aan te pakken en een oplossingsweg te zoeken.

- Zorg voor 'uitdagende' problemen.
  Heel wat vraagstukken zijn niet uitdagend genoeg en prikkelen de leerlingen te weinig. Dit komt omdat ze meestal aan bod komen als louter toepassingssituaties waarbij er gewoon wat gerekend moet worden. Zo'n vraagstukken ontwikkelen weinig of geen probleemoplossende vaardigheden maar zijn louter gericht op het kiezen en uitvoeren van de vier basisbewerkingen met de gegeven getallen. Deze vraagstukken mogen in je aanbod echter niet ontbreken, zeker als je aan de rekenzwakke leerlingen in je klasgroep denkt.

  Vergelijk:

  - *Moeder bakt pannenkoeken op de verjaardag van Bert. Hij mag vijf vrienden uitnodigen en elk kind krijgt vier pannenkoeken.*
    Hoeveel pannenkoeken moet moeder bakken?

  - *Jij bent jarig en je nodigt vrienden uit en je moeder bakt pannenkoeken.*
    Hoeveel bakt ze er?

- Zorg voor probleemsituaties die op verschillende manieren kunnen geïnterpreteerd worden en waarbij al dan niet verschillende oplossingen kunnen voorkomen.

  - *Joeri is 12 jaar en zijn vriendin Elsie 11. Ze gaan naar de speeltuin. Wie zit het hoogst op de wip?*

- *Hoeveel liter water heb je nodig om een bad te nemen?*

- *Hier is een reisbrochure. Bereken de kostprijs voor jullie gezin van een reis naar ... in de periode... Hou rekening met alle kosten.*

Uiteraard zijn zo'n probleemsituaties meestal meer open problemen die aanleiding kunnen geven tot overleg en discussie over interpretatie, aanpakwijze en antwoord.

- Bied een variatie aan in presentatie:

  een tekstopgave,
  een verhaal,
  een tabel,
  een tekening,
  een krantenknipsel,
  een stripverhaal,
  een folder,
  ...

- Laat leerlingen zelf vraagstukken bedenken en maken.

- Vermijd vraagstukken die cijfermateriaal bevatten dat al lang achterhaald is of waar je dingen moet veronderstellen die absurd zijn of die je niet mag toetsen aan de werkelijkheid.

- Vergeet de meer klassieke vraagstukken niet. Ze kunnen zonder veel reflectie en discussie opgelost worden via één of twee basisbewerkingen met de gegeven getallen en de rekenvaardigheid van de leerlingen vaart er wel bij.

Klascultuur

De heersende 'klascultuur' kan zowel op een negatieve wijze als op een positieve wijze je onderwijspraktijk beïnvloeden.

- Zorg voor voldoende tijd zodat leerlingen niet alleen aan het 'rekenwerk' denken bij vraagstukken.

- Reageer altijd positief en stimulerend op een vraag of een opmerking van een leerling.

- Hou rekening met de leerling zijn interpretatie van de oplossing van een vraagstuk en stimuleer om telkens het verband met de werkelijkheid te leggen.

- Beoordeel niet alleen het product maar vooral het proces op een vraagstukkentoets.
  Je kan je puntenverdeling zo afspreken dat je maar de helft op het resultaat van het vraagstuk zet. De andere helft moeten de leerlingen verdienen door te laten zien dat ze het oplossingsproces beheersen.

- Geef ruimte voor het verwoorden van aanpak, denkbeelden en opvattingen.

Een passende rekenwijze kiezen
B52

Vanaf tweede leerjaar

Leer kinderen systematisch de meest geschikte rekenwijze te kiezen. Ze grijpen vlug naar de ZRM, zelfs voor de meest eenvoudige oefeningen. Toch zijn er heel wat mogelijkheden om kinderen te laten ervaren dat het gebruik van de zakrekenmachine meer tijd kost en soms zelfs leidt tot foutieve uitkomsten.

- *Beslis welke rekenwijze(n) je kiest en verantwoord die keuze.*

  - *4 x 10 x 25 x 10 =*
    400 x 5 =
    509 x 21 x 0 x 2 =
    110 000 - 20 000 =

  - *Vul het juiste cijfer in (één per vakje)*
    56 x 2⬚ = 1 ⬚ ⬚ 8

    3⬚ x 73 = ⬚ 701

    81 x 2⬚ = ⬚ ⬚ 20

    ⬚ 9 x 23 = 1 58⬚

  - *Hoeveel woorden staan er ongeveer in een boek van 200 bladzijden?*

  - *Wie vindt een handige manier om de som te vinden van alle natuurlijke getallen van 1 tot 1000?*
    (Als je de natuurlijke getallen tot een zeker getal optelt, dan vind je de som als volgt: neem het product van het laatste getal met het volgende getal en deel dit product dan door twee)

- *[Uit een periodiek peilingonderzoek in Nederland]*

  'Yvonne rekent uit op haar rekenmachine:
  715,347 + 589,2 + 4,553 = 13091
  Bij het opschrijven van het antwoord heeft ze de komma vergeten.
  Wat moet het antwoord zijn?'

  1. *Slechts 32 % van de Nederlandse leerlingen beantwoordt dit goed.*
  2. *28 % gebruikt de volgende regel: de meeste getallen hebben drie cijfers achter de komma, het antwoord dus ook.*
  3. *Ongeveer 16 % cijfert, maar daarvan maakt meer dan de helft een fout.*
  4. *Ongeveer 12 % gaat schattend te werk:*
     700 + 600 = 1300

"In het algemeen kan gesteld worden dat slechts 10 tot 25 % van de kinderen wel eens overgaat tot een schatting, afhankelijk van de soort opgave, de aard van de getallen en de expliciete vraag om te schatten. Dit schamelijke schatten is overigens een internationaal verschijnsel."

Verhoudingen
B53
B54
B55

Opmerkelijk is het belang dat het leerplan hecht aan het 'zien van', het 'bepalen van' en het 'rekenen met' verhoudingen.

Verhoudingen bepalen zonder bewerkingen uit te voeren
B53a

Vanaf tweede leerjaar

'Verhoudingen bepalen zonder bewerkingen uit te voeren' is een doel dat je met de nodige omzichtigheid dient te benaderen.

Bekijk bijvoorbeeld beide tekeningen:

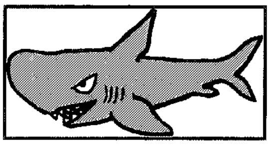


fig. 1

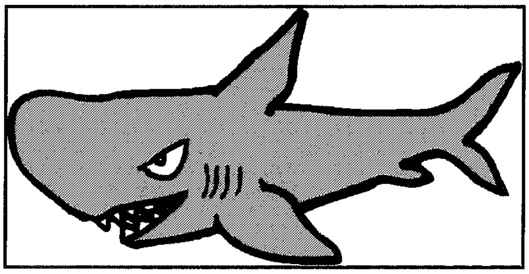


fig. 2

Is de kleine haai twee keer zo klein als de grote haai...of vier keer zo klein...of acht keer zo klein?

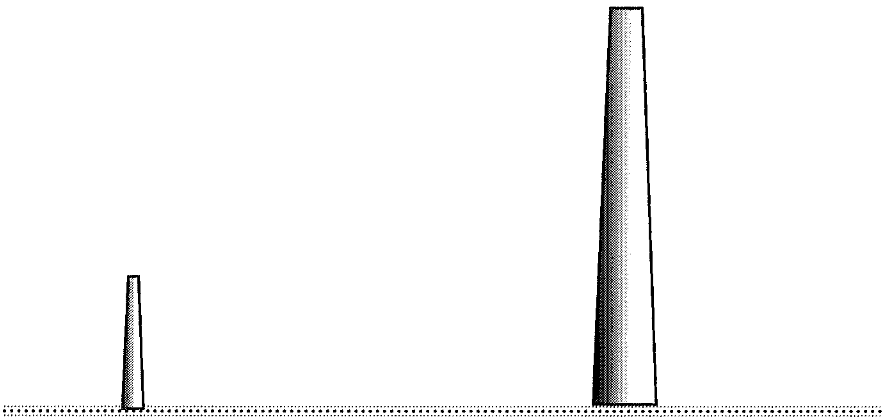
- Als je enkel naar de lengte kijkt, dan is de kleine haai twee keer zo klein. (lengteverhouding)

- De 'foto' van de kleine haai kan je echter vier keer op de foto van de grote haai afpassen. (lengte- en breedteverhouding, of oppervlakteverhouding, bedekkingprincipe)

- Qua gewicht zal de grote haai ongeveer acht keer zwaarder zijn dan de kleine haai. (lengte- breedte- en hoogteverhouding, of volumeverhouding)

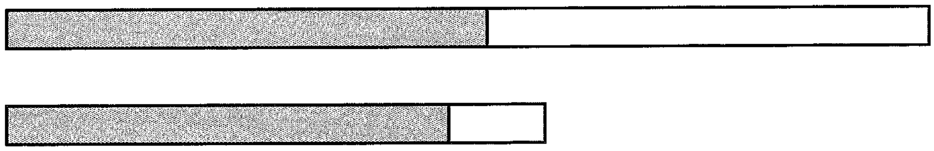
In het tweede en derde leerjaar is het voldoende dat leerlingen ervaringen opdoen met verhoudingen in lengte- en oppervlaktesituaties, op voorwaarde dat de afbeeldingen verhoudingsgetrouw worden afgebeeld.

- *Hoeveel keer is de tweede paal langer dan de eerste? (lengte)*

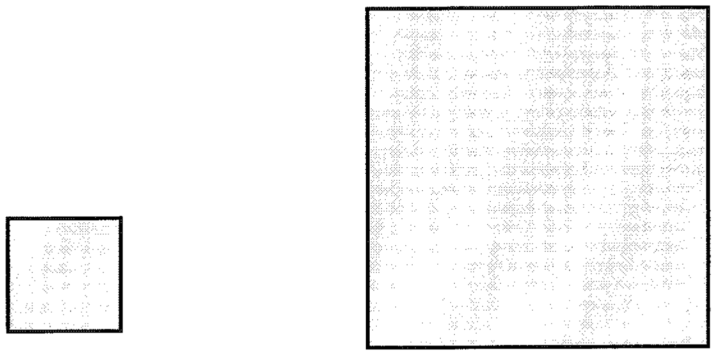


Kan je de vraag oplossen zonder te meten?
"Ik neem een strookje dat zo lang is als de eerste paal en daarmee meet ik."

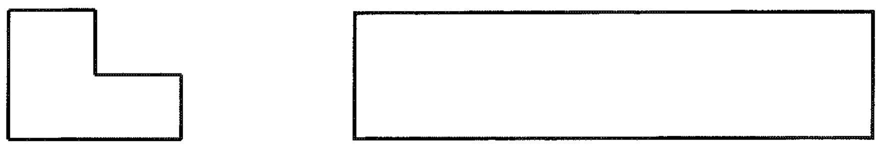
- *Van welke strook is het grootste deel gekleurd? (lengte)*



- *Hoeveel keer kan het kleine vierkant in het grote? (oppervlakte)*



- *Bekijk goed de tweede figuur. Je kan die maken door een aantal keer de eerste figuur te gebruiken. Hoeveel keer heb je ze nodig? (oppervlakte)*

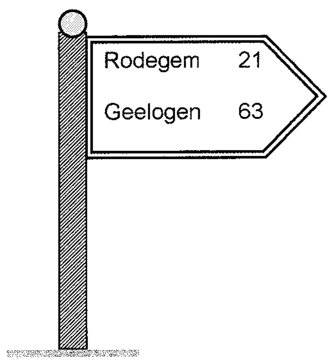


Verhoudingen bepalen via berekeningen
B53b

Vanaf vierde leerjaar

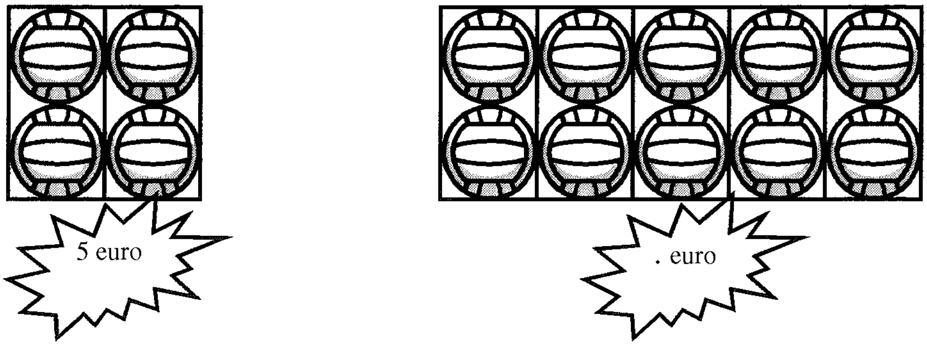
Verhoudingen bepalen via berekeningen ligt in het verlengde van de vorige opgaven.

- *In Zonderschool vind je deze wegwijzer:*



Hoeveel kilometer ligt Rodegem van Zonderschool? Hoeveel keer zo ver is Geelogen?

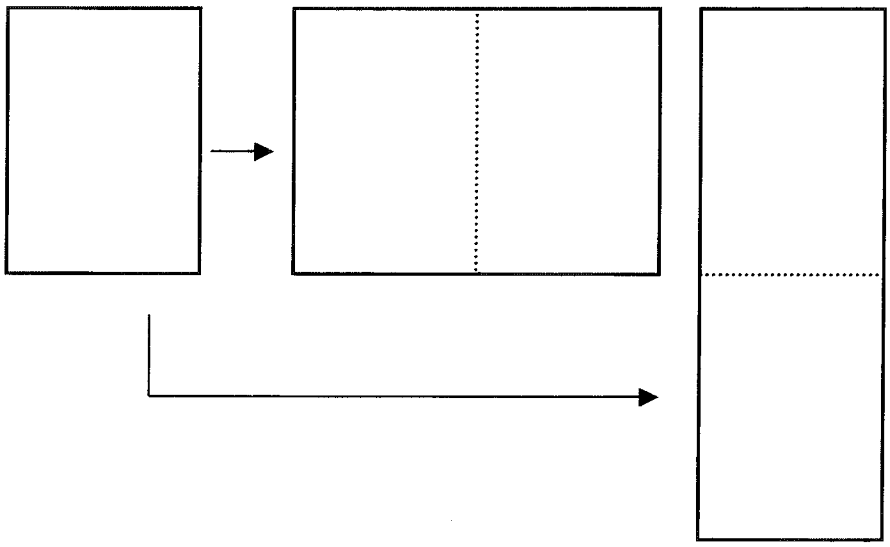
- *Alle ballen kosten evenveel.*
  Wat moet er op het tweede prijskaartje staan?



- *Teken een rechthoek waarvan de oppervlakte precies dubbel zo groot is als de gegeven rechthoek met basis 4 cm en hoogte 3 cm.*

Recht- evenredige grootheden
B54a

Vanaf tweede leerj



Recht-evenredige grootheden zijn grootheden die tegelijkertijd groter of kleiner worden, en dit in dezelfde verhouding.

Je ziet een kermismolen draaien op het dorpsplein. Deze molen draait twee keer rond per minuut. Hoe dikwijls draait de molen rond op vier minuten?

- *De grootheden 'tijd' en 'aantal toeren' zijn hier recht-evenredig: beide vergroten of verkleinen tegelijkertijd:*
  Als de molen meer toeren draait neemt de tijd toe.
- *De verhouding blijft gelijk: als de molen vier keer langer draait, dan is het aantal toeren ook vier keer meer.*

Verhoudingen vergelijken

Begin met eenvoudige toepassingssituaties vraagstukken waar de verhouding gemakkelijk uit de situatie af te leiden is:

- *De meester kocht 4 pakjes stiften. Eén pakje kost 1 euro. Hoeveel kosten die 4 pakjes? (vier keer meer)*

- *Op de markt: '20 kg aardappelen voor 8 euro'. Hoeveel kost een zak aardappelen van dezelfde soort die 10 kg weegt? (de helft)*

Het ontbrekende verhoudingsgetal berekenen

Vraagstukken waar het ontbrekende verhoudingsgetal de oplossing is, zijn moeilijker en vragen meer inzicht.

- *Hoeveel potten choco van 1 euro kan ik kopen met 5 euro?*

- *Het pakje met drie koeken kost 1 euro. Hoeveel is dat ongeveer per koek?*

Een voorbeeld per leerjaar:

Tweede leerjaar

- *1 kg suiker kost 1 euro. Heb ik met 3 euro genoeg voor 4 kg suiker?*

Derde leerjaar

- *In een kopje kan 25 cl. Hoeveel kopjes melk uit 1 liter?*

Vierde leerjaar

- *Vader betaalt 37 euro voor een rol draad. Hoeveel is dat per meter? (Wat ontbreekt? Of: zoek op in een reclamefolder)*

Vijfde leerjaar

- *Ik krijg 4% intrest op mijn spaarboekje. Met Nieuwjaar kan ik 50 euro sparen. Hoeveel intrest heb ik na 1 jaar op dit bedrag?*

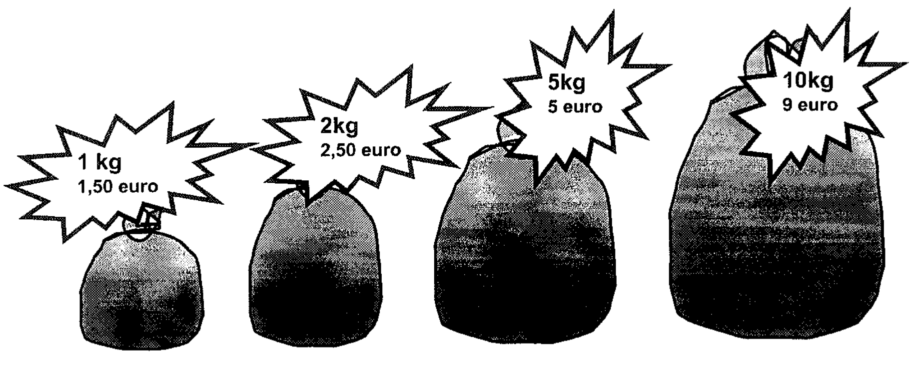
Zesde leerjaar

- *In België wonen ongeveer 10 miljoen mensen op 30 000 km²; in Nederland zijn er ongeveer 16 miljoen inwoners op 40 000 km². Waar is de bevolkingsdichtheid het grootst?*

Niet-recht evenredig

Om inzicht in het begrip recht-evenredigheid te krijgen, is het zeker aangewezen om ook voorbeelden van niet-recht-evenredigheid aan te bieden.

- *Wat zie je op deze reclame?*



- *De vader van Mia koopt elke week zeven kg appelen. Hij ziet de aanbieding van deze week in de winkel en bedenkt op hoeveel manieren hij zeven kg kan kopen.*
  Welke keuzes kan hij maken?
  Reken uit wat hij betaalt.
  Waarom gaat de vader van Mia uiteindelijk met een pak van 10 kg naar huis?

- *Steven heeft bij dezelfde handelaar ook appelen gekocht. Hij betaalde 10 euro en stapte met twee zakken naar buiten. Geef Steven een tip waarmee hij geld spaart.*

Verhoudingstabel

Merk op dat in de werkelijkheid de zojuist beschreven situatie veel voorkomt.

Een verpakking van 10 kg kost meestal minder dan 5 verpakkingen van 2 kg. Met behulp van deze verhoudingstabel kan je nagaan hoeveel je spaart.

aantal kg	2	4	6	10	...
prijs in euro	2,5	5	7,5	12,5	...

Omgekeerd evenredige grootheden
B54b

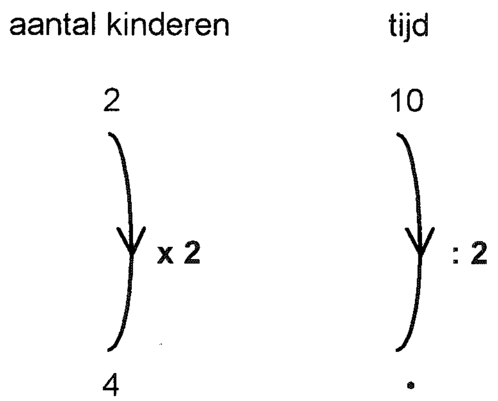
Vijfde leerjaar

Omgekeerd evenredige grootheden zijn grootheden die in tegengestelde zin veranderen, en dit in dezelfde verhouding.

Inge en Jos vegen het bord af en ruimen de klas wat op. Ze hebben hiervoor een tiental minuten nodig.
Hoelang doen ze er over als Sabien en Els helpen?

De grootheden 'tijd' en 'aantal kinderen' zijn hier omgekeerd evenredig.
- *beide vergroten of verkleinen tegengesteld:*
  als het aantal opruimers stijgt, daalt de tijd die ze nodig hebben
- *de verhouding blijft gelijk:*
  als je twee keer meer opruimers hebt, dan zal de tijd halveren (bedenk dan de werkelijkheid helemaal anders kan zijn!)

De verhoudingstabel kan je hier niet gebruiken. Een pijlenschema kan je wel gebruiken.

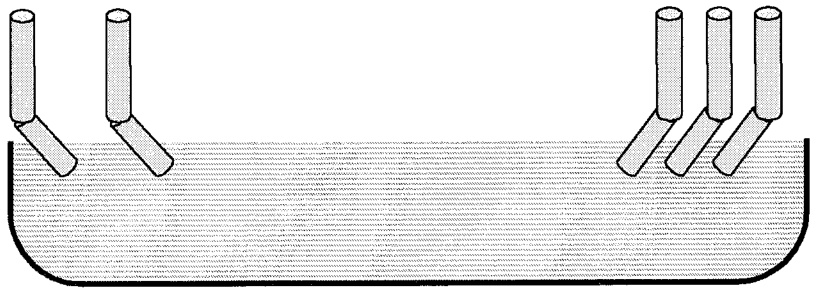


Voor omgekeerd evenredige grootheden zijn de toepassingsmogelijkheden minder talrijk en een stuk moeilijker.

- *Vader werkt 4 dagen om de tuin om de spitten. Als ik vader help, hoe vlug zijn we dan klaar?*

- *Ik rijd gemiddeld tegen 20 kilometer per uur, vader tegen 25 kilometer per uur. Hoelang zal elk van ons beiden rijden van Sint-Niklaas naar Brussel? (50 km)*

- *Deze vergaarbak wordt volledig gevuld met regenwater in 2 uur en 25 minuten. Hiervoor laat boer Jos twee afvoerpijpen in de bak komen. Hij maakt de bak leeg en laat de drie afvoerpijpen van de nieuwe stal ook in deze bak komen. Als elke afvoerpijp ongeveer evenveel water in de bak laat, hoe lang duurt het dan voor de bak vol is?*



Gelijkwaardige verhoudingen in verdeelsituaties bepalen ***B55a***

Vanaf vijfde leerjaar

Een hoeveelheid kan je op twee manieren verdelen.

- Je kan de hoeveelheid in volledig gelijke delen verdelen. Deze manier van verdelen pas je toe bij breuken en bij de bewerking delen.

- Een tweede manier van verdelen gebeurt verhoudingsgewijs.

In de familie Lievens krijgen de kinderen elke week 1,50 euro zakgeld per levensjaar. Zo krijgt Tom 24 euro, Gert 15 euro en Koen 8 euro. Bij hun verjaardag geeft oma 5 euro per levensjaar. Hoeveel krijgt elk?

Dit komt in de werkelijkheid voor. Eerlijk verdelen betekent niet altijd 'in gelijke, even grote, delen verdelen'.

We bekijken enkele voorbeelden.

- *Joris gebruikt 5 schepjes koffie voor 4 kopjes. Annelies neemt 4 schepjes voor 3 kopjes. Wie zet de sterkste koffie?*

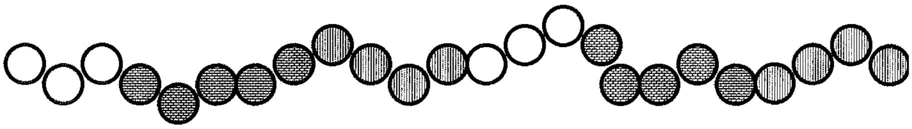
Joris

aantal schepjes	5	10	**20**	**1**	
aantal kopjes	4	8	**16**	**4/5 = 16/20**	

Annelies

aantal schepjes	4	**20**	**1**		
aantal kopjes	3	**15**	**3/4 = 15/20**		

Uit de tabel kan je afleiden dat Annelies de koffie iets sterker maakt.



Hoe zit dit kralensnoer in elkaar? Zit er een patroon in?
Ah ja, eerst drie witte, dan vijf 'rode' en dan vier 'groene'.

Juf Xana deelt een opgavenblad uit met volgende opdrachten:
1 Vervolledig de eerste drie kolommen van de tabel.

	Samen	12	24	36		
						
						
						

2 De vierde en vijfde kolom mag je zelf invullen.
Kies eenvoudige getallen.
3 Welk deel van de kralen is wit?
4 Welk deel van de kralen is rood?
5 Welk deel van de kralen is groen?

Voor de vlugge werkers:
Welke kleur heeft de honderdste kraal?
Deze vraag kan verschillende aanpakken uitlokken:

- *Pieter tekent gewoon 100 kralen en kleurt vluchtig van in het begin, maar hij vindt het toch.*

- *Elisa zag het echt niet zitten. Maar Hans begon het systeem te zien: "Een snoer van 12 kralen eindigt op een groene kraal...maar ook een snoer voor 24, 36, 48, 60, 72, 84, 96, en dan nog 4 kralen: wit - wit - wit - rood!*

- *Hilde zag het nog mooier: "Een snoer van 2 keer 48 of 96 kralen eindigt zeker op groen." En dan redeneert ze verder op dezelfde manier als Hans.*

- *Kevin vond het niet. Hij denkt altijd direct aan rekenen, daar is hij dan ook zeer goed in. "Maar juf, er staat nergens 100 in de tabel, dan kan je dat toch niet zoeken!" De oplossing van 'rekenzwakke' Pieter verraste hem duidelijk. "Zie je, Kevin, niet alles kan je alleen met rekenen oplossen," zei de juf.*

Mengen volgens een zekere verhouding
B55b

Vanaf het vijfde leerjaar

Meester Tijs hangt een papier op het bord...

Recept voor één liter 'Supercocktail'
- *1/5 l sinaasappelsap,*
- *2/5 l pompelmoessap,*
- *1/10 l grenadinesiroop,*
- *de rest is ananassap*

Na een verkennend gesprek noteert de meester twee vragen op het bord.

1 Druk het deel 'ananassap' uit met een breuk.
2 Maak 5 liter 'Supercocktail'.
Hoeveel heb je nodig van elk ingrediënt?

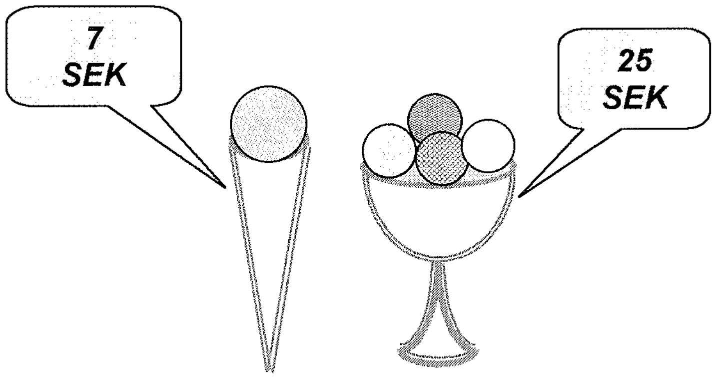
Merk op dat het leerplan hier duidelijk kiest voor 'eenvoudige' situaties. Ingewikkelde oefeningen met mengsels vermijd je. Het belangrijkste is dat leerlingen verschillende strategieën ontwikkelen om zo'n problemen aan te pakken en leren om hun aanpak bij te sturen.

Verhoudingen bij 'inwisselen' van munten
B55c

Vanaf het vijfde leerjaar

Met de invoering van de euro zijn heel wat geldomzettingen van de baan. Toch blijft het belangrijk om geldwaarden te kunnen inwisselen. De euro is de munt van (voorlopig?) twaalf landen van de Europese Monetaire Unie (EMU). Andere landen hanteren andere munten.

1 euro is ongeveer 8 Zweedse kronen.
Hoeveel kosten deze ijsjes in onze munt?



'Inwisselen' bij lengtematen

Inwisselen vind je niet alleen bij munten maar ook bij lengtematen als yards, inches, ...

Bij heel wat computerprogramma's kan je een keuze maken tussen cm of inches om lengtes op het scherm weer te geven.

De grootte van een computerscherm drukt men meestal in inches uit. Hoeveel cm is dat ongeveer?

(Groei-) percentage berekenen
B56

Vijfde leerjaar

Eerst en vooral komen eenvoudige intrestvraagstukken aan bod.

- *Ik krijg 4% intrest op mijn spaarboekje. Met Nieuwjaar kan ik 50 euro sparen. Hoeveel intrest heb ik na 1 jaar op dit bedrag?*

- *De prijs van een pakje frieten wordt 5 cent duurder. Een pakje gaat 1 euro en 30 cent kosten. Dat is een stijging van 5 %.*
  Is dat correct? Leg uit.

- *Vorig jaar heeft het schoolfeest 1 200 euro opgebracht. Dit jaar bedroeg de opbrengst 1 560 euro.*
  Met hoeveel percent is de opbrengst gestegen?
  Werk per twee en noteer jullie werkwijze.

- *Flinke daling aantal inbraken:*
  Van onze verslaggever
  'De politie deelde mee dat vorig jaar in 1 op de 25 huizen in Geelogen is ingebroken. Dit jaar bleek dat nog maar in 1 op de 20 huizen te zijn gebeurd. Een flinke daling. Maar ook 20 % is natuurlijk nog altijd te veel.'
  Waar zit de fout?

Groeipercentage met een ZRM berekenen

Het berekenen (met behulp van een zakrekenmachine) van bijvoorbeeld de bevolkingstoename.

- *Vijf jaar geleden had Wintergem 68 000 inwoners.*
  Nu zijn het er 69 360.
  Bereken het gemiddelde groeipercentage per jaar.
  Oplossing: 1 360 inwoners op 5 jaar.
  Dit is gemiddeld 272 inwoners per jaar.
  Neem je ZRM: 272 : 680 = 0,4 % of 272 : 68 000 = 0,004
  (Dit leerplan vraagt enkel enkelvoudige intrestberekening voor de basisschool. In de werkelijkheid werk je met samengestelde intrest.)

- *Neem een dorp van 10 000 inwoners waarvan het aantal inwoners elk jaar toeneemt met 4 %.*
  Hoe lang duurt het voor het aantal inwoners verdubbeld is?

  - *Oplossing met enkelvoudige intrestberekening:*
    Elk jaar is er een toename met 4 %. Een verdubbeling betekent een toename met 100 %. Na 25 jaar is het aantal inwoners verdubbeld.

  - *Oplossing met meervoudige intrestberekening:*
    Deze opgave kan een uitdaging zijn om de ZRM te gebruiken als volgt:
    Neem 10 000 inwoners.
    Met je ZRM: 10 000 x 1,04 = 10 400, dit is het aantal inwoners na 1 jaar. Zet een streepje. (Turf)
    Nu opnieuw: 10 400 x 1,04 = 10 816, dit is het aantal inwoners na 2 jaar. Zet een tweede streepje.
    Opnieuw: 10 816 x 1,04 = 11 248,64. Dit herhaal je tot je 20 000 (of iets meer inwoners) bereikt.
    Het aantal streepjes is het aantal jaar. (Na 18 jaar: 20 258 inwoners.)

Gemiddelde
B57

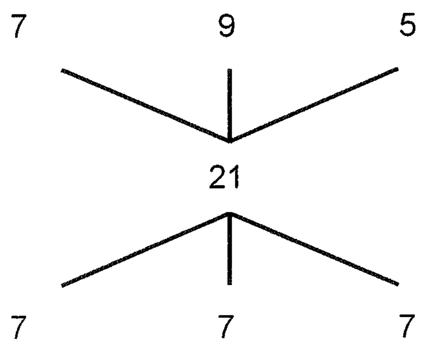
Het gemiddelde is een begrip dat veel voorkomt in dagdagelijkse situaties en berichtgeving.

- *Gemiddelde neerslag.*
- *Gemiddelde leeftijd.*
- *Gemiddeld aantal kinderen per gezin.*
- *Gemiddeld waterverbruik bij particulieren.*
- *Gemiddeld inkomen.*

Vierde leerjaar

In een vierde leerjaar komen eenvoudige situaties aan bod waarbij het zinvol is om het gemiddelde te gebruiken. Zorg ervoor dat het gemiddelde een getal is dat kan voorkomen binnen de situatie zelf.

Ik heb een 7, een 9 en een 5 op 10 voor drie rekentoetsen.
Welk cijfer krijg ik op mijn rapport?
$7 + 9 + 5 = 21$, en dan $21 : 3 = 7$
Antwoord: Op mijn rapport komt 7 op 10.



Als je bij het gegeven voorbeeld de getallen 8, 9 en 5 gebruikt, krijg je een situatie waarbij het gemiddelde 7,333... niet in de beschreven probleemstelling kan voorkomen. Vermijd dit in een vierde leerjaar.

Mediaan
Vijfde leerjaar

Vanaf het vijfde leerjaar kan je de begrippen gemiddelde en mediaan gebruiken in heel wat betekenisvolle situaties.

- *We berekenen het gemiddeld aantal kinderen in de gezinnen waar jullie deel van uitmaken.*
  Ligt dit gemiddelde hoger of lager dan het gemiddelde over heel België?

- *Uit de krant:*
  'De gemiddelde leeftijd is opgeklommen tot 79,3 jaar.'
  Wat betekent dit? Wat betekent de decimaal '3' hier?

- *Zoek vijf opeenvolgende getallen waarvan de som 235 is.*
  (het gemiddelde komt hier als 'middelste' getal uit, $235 : 5 = 47$)

- *De mediaan van vijf getallen is 23.*
  Welke zijn die getallen?
  (Hier zijn veel oplossingen mogelijk, je dient er enkel voor te zorgen dat 23 het middelste getal is.)

- *Evy schrijft drie getallen op de achterkant van het bord.*
  Wat is de mediaan, Evy? '18'
  Wat is het gemiddelde, Evy? '15'
  We raden de getallen die Evy heeft opgeschreven.
  Werk per twee.

- *Jan berekent de gemiddelde leeftijd van vijf voetballers. Hij krijgt als resultaat: 28 jaar. Eén voetballer is ziek. Als Jan nu de gemiddelde leeftijd berekent zonder die zieke krijgt hij 31 jaar. Hoe oud is de zieke voetballer?*

- *Op het rapport staan het gemiddelde en de mediaan (midscore) bij elk vak.*
  Wat betekent...
  de mediaan is laag — de mediaan is hoog
  het gemiddelde is laag — het gemiddelde is hoog?

- *Het KMI zegt dat deze nacht gemiddeld 20 liter per m² regen uit de lucht is gevallen. Is dat veel?*
  Hoeveel water ongeveer zou dat op een oppervlakte van onze klasvloer zijn?

- *Hoeveel euro kost een gewone gezinswagen ongeveer?*

- *Hoeveel leerlingen zitten er ongeveer in één klas op onze school?*

- *Hoe berekenen we de gemiddelde temperatuur over een hele dag?*
  (zo'n vragen waarbij je 'wikt' en 'weegt' lokken bedenking uit over gemiddelde en mediaan)

Het belangrijkste is uiteraard dat leerlingen inzicht krijgen in de betekenis van de begrippen gemiddelde en mediaan. Zo is het niet aangewezen om complexe berekeningen te laten maken, tenzij je die berekeningen vlot met een ZRM kunt uitvoeren.

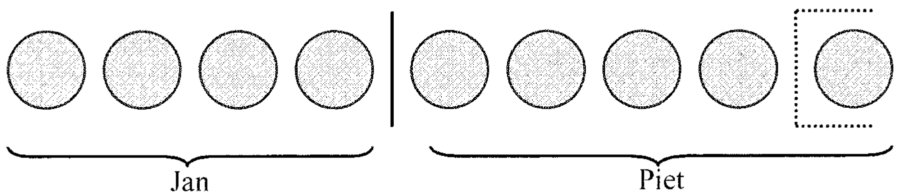
We berekenen de gemiddelde tijd van Silke, Niels, Birgit en Mieke die ze nodig hadden om 100 m te lopen.
Silke was de traagste. Als we Silke niet laten meelopen, vermeerdert de gemiddelde tijd dan of vermindert de tijd?
Wat is de mediaan in beide situaties?

De ongelijke verdeling
Som en verschil gekend
B58a

Vanaf vijfde leerjaar

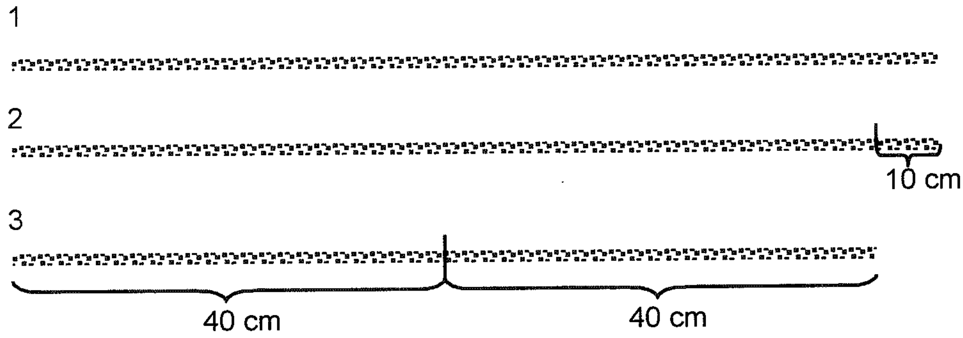
Bied eerst een paar eenvoudige probleemsituaties aan waar leerlingen de oplossing kunnen 'spelen', 'knippen', ...

- *Verdeel 9 koekjes onder Jan en Piet. Piet is een jaartje ouder en krijgt één koekje meer.*
  Hoeveel koekjes krijgt elk?



Het is handig als je eerst het koekje dat Piet meer krijgt eerst aan Piet geeft. Zo krijg je nadien twee gelijke delen.

- *Ik las bij een werkwijze om een vlieger te maken:*
  'Je hebt ook een stuk touw nodig van 90 cm. Dat stuk touw verdeel je in twee stukken waarvan het ene 10 cm langer moet zijn dan het andere.'
  Hoe moet je nu knippen?



Hieruit volgt de methode:

Het verschil voeg je bij of neem je weg van de som en je verdeelt eerlijk volgens het aantal delen.

- *Pat is twee jaar ouder dan Lucie en krijgt van oma 1 euro meer zakgeld dan haar zus. Oma verdeelt 27 euro. Hoeveel euro krijgt elk?*

- *Koen en zijn broer Luc sparen samen voor hun vakantie op hetzelfde spaarboekje waarop nu 231 euro staat. Luc heeft echter 11 euro minder gespaard dan zijn broer.*
  Hoeveel hebben ze elk gespaard?

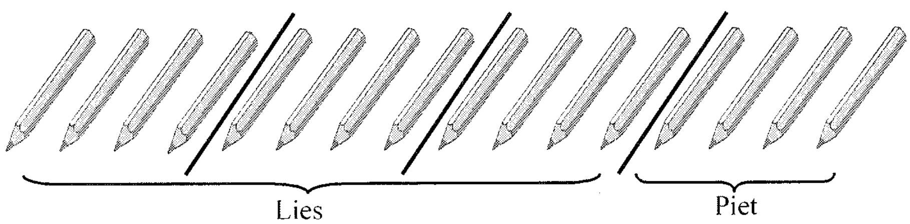
- *Verdeel 2 700 kg aardappelen over twee vrachtwagens. De ene klant heeft 300 kg meer besteld dan de andere. Bereken op twee manieren.*

De ongelijke verdeling
Som en verhouding van de delen zijn gekend
B58b

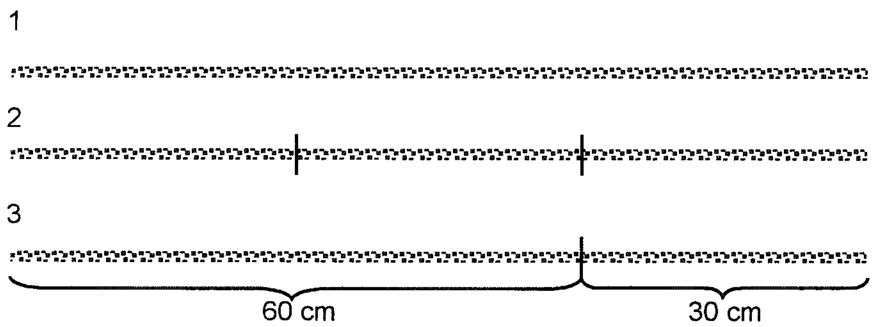
Vanaf vijfde leerjaar

Bied eerst een paar eenvoudige probleemsituaties aan waar leerlingen de oplossing kunnen 'spelen', 'leggen', ...

- *Lies en Maja hebben hun potloden samen gelegd en we tellen er 16. Hoeveel hebben ze er elk als je weet dat Maja driemaal zoveel potloden heeft als Lies?*



- *Om dit hok te maken heb je een stok nodig van ongeveer 90 cm die je moet verdelen in twee delen waarvan het ene deel dubbel zo lang moet zijn als het andere deel. Waar moet je zagen?*



Hieruit volgt de methode:

> Tel de elementen van de verhouding op. Deel de te verdelen grootheid door dat getal. Nu heb je één deel. Bereken de andere delen volgens de grootte van elk deel.

- *Het onderwijs 'vervrouwelijkt'. Er zijn nu ongeveer 7 maal meer vrouwen in het lager onderwijs dan mannen. De scholen in een zekere regio tellen 1 488 leerkrachten.*
  Hoeveel mannen zijn er nog in deze leerkrachtengroep?

Dit vraagstuk kan je ook met verhoudingsrekenen oplossen.

aantal vrouwen	aantal mannen	som
7	1	8
x 186	x 186	x 186
•	•	1 488

- *De som van twee getallen is 825. Het kleinste is één vierde van het grootste. Welk zijn die getallen?*

- *Hoe verdelen we 180 knikkers eerlijk over twee rijen waarbij op de eerste rij 7 leerlingen zitten en op de tweede rij 8 leerlingen?*

- *In een school zijn er drie klassen van het 5de leerjaar.*
  Samen spaarden ze 152 euro voor een actie. De A-klas had 1/3 meer dan de B- klas die op haar beurt 1/5 meer had dan 5C.
  Hoeveel heeft elke klas?

- *Verdeel 2 700 kg aardappelen over twee vrachtwagens. De ene klant heeft dubbel zoveel besteld als de andere. Hoeveel bestelde elk?*

Bruto, netto en tarra
B59

Vanaf vierde leerjaar

Bruto, netto, tarra komen niet alleen voor in de 'klassieke' betekenis van 'totaal gewicht = het zuivere product + de verpakking'. Zo lees je op vrachtwagens:

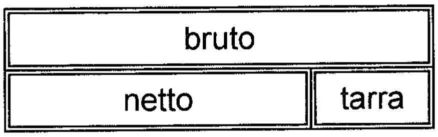
Tarra = 3 500 kg *het gewicht van de lege vrachtwagen*
Laadvermogen = 5 ton *dit is het maximaal toegelaten nettogewicht.*

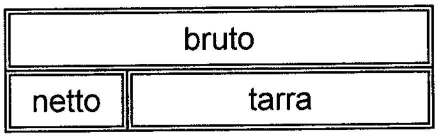
Op de weegbrug leest men het brutogewicht af.

Hoeveel kilogram duidt de weegbrug aan als de vrachtwagen maximaal geladen is?
En hoeveel als hij halfvol is?

Op een factuur kan sprake zijn van een 'nettoprijs' na aftrek van de korting. Op dat bedrag moet dan de BTW betaald worden.

De relatie tussen de drie termen bruto, netto en tarra kan je weergeven met een strookschema.





Het is belangrijk dat leerlingen weten dat netto niet altijd meer is dan tarra. Daarom is het zinvol om het strookschema, zoals op de tekening, eens te variëren.

- *Wat is bij een kistje met flessen wijn tarra, netto en bruto?*

- *Kan je over tarra praten bij een banaan?*

- *Geef een voorbeeld waar het tarragewicht in vergelijking met het nettogewicht zeer klein is.*

Begrippenlijst bewerkingen

Aantal

hoeveelheid bestaande uit afzonderlijk telbare eenheden.

Gestructureerd aantal:	telbare hoeveelheid die mits een zekere ruimtelijke schikking of groepering vlugger naar aantal ingeschat kan worden.
Ongestructureerd aantal:	telbare hoeveelheid die moeilijk vlug naar aantal kan ingeschat worden.

Aftrekking

zie formule

Algoritme

zie procedure om te cijferen

Bewerking

voegt aan twee (of meer) gegeven elementen een derde element toe. Dit is het resultaat.
Het resultaat van een bewerking met getallen is een nieuw getal.

Soorten bewerkingen

zie ook formule

Optelling:	het resultaat is de som
Aftrekking:	het resultaat is het verschil
Vermenigvuldiging:	het resultaat is het product
Deling:	het resultaat is het quotiënt

Omgekeerde bewerking

De optelling is de omgekeerde bewerking van de aftrekking.
De deling is de omgekeerde bewerking van de vermenigvuldiging.

Volgorde van bewerkingen

Merk op:
Sommige zakrekenmachines voeren de bewerkingen uit in de volgorde zoals je ze invoert.

Op het toetsenbord van je computer stelt * een vermenigvuldiging voor en / een deling.

*7 x 4 = 7 * 4*
28 : 4 = 28 / 4

In het secundair onderwijs noteert men de vermenigvuldiging met een punt.

7 x 4 = 7 . 4

Eigenschappen van bewerkingen

Wisselen (commutativiteit)
Bij een optelling en een vermenigvuldiging mag je de termen/factoren van plaats wisselen. Het resultaat blijft hetzelfde.

7 + 3 = 3 + 7
7 x 3 = 3 x 7

Schakelen (associativiteit)
Bij een optelling en een vermenigvuldiging mag je de volgorde van de termen/factoren kiezen. Het resultaat blijft hetzelfde.

(3 + 4) + 2 = 3 + (4 + 2)
(4 x 3) x 2 = 4 x (3 x 2)

Splitsen en verdelen (distributiviteit)
De vermenigvuldiging is zowel links- als rechtsdistributief t.o.v. de optelling en de aftrekking.
Je kan dit laten verwoorden als:
"Bij de vermenigvuldiging mag je kiezen welke factor je splitst en verdeelt in een som of verschil."

7 x 6 mag je oplossen als	*(7 x 4) + (7 x 2)*
of	*7 x 6 = (6 x 6) + (1 x 6)*
of	*7 x 6 = (7 x 7) - (7 x 1)*
of ook nog	*7 x 6 = (10 x 6) - (3 x 6)*

De deling is daarentegen is ten opzichte van de optelling en de aftrekking enkel maar rechts-distributief.

36 : 4	*mag je niet oplossen als*	*36 : (2 + 2) = (36 : 2) + (36 : 2)*
	maar wel als	*(40 - 4) : 4 = (40 : 4) - (4 : 4)*
	of	*(28 + 8) : 4 = (28 : 4) + (8 : 4)*

Breuk

drukt een aantal delen uit van een grootheid die in gelijke delen is verdeeld.
Notatie van een breuk.

$$\frac{T}{N}$$

waarbij N de noemer is die het aantal gelijke delen uitdrukt waarin de grootheid is verdeeld, en T de teller die het aantal gelijke delen uitdrukt die je van die verdeling neemt.
De notatie T/N moeten de kinderen alleen kunnen lezen en herkennen als een breuk.

Referentiegeheel: het geheel waarvan je vertrekt bij het nemen van een breuk.

Soorten breuken

Echte breuk: een breuk waarvan de teller kleiner is dan de noemer.
2/3 - 4/9

Gelijknamige breuken: breuken zijn gelijknamig als ze dezelfde noemer hebben.
5/8 - 3/8 - 7/8

Gelijkwaardige breuken: breuken zijn gelijkwaardig als ze van eenzelfde grootheid hetzelfde deel uitdrukken.
2/3 = 4/6 = 8/12

Ongelijknamige breuken: breuken waarvan de noemer verschillend is.

Onechte breuk: de teller is groter of gelijk aan de noemer.
5/3 - 6/5

Stambreuk: breuk met teller 1.

Eenvoudige breuken: de term "eenvoudig" krijgt betekenis volgens de vooropgestelde zinvolle situatie.

Bij het gelijknamig maken betekent dit onder meer dat er geen opgaven gegeven worden als: *"Maak 8/294 en 91/210 gelijknamig."*
Maar wel een opgave als: "*Mark neemt drie delen van een taart weg die in vijf gelijke delen was verdeeld. Van een tweede taart die in zeven gelijke delen was verdeeld, neemt hij vier delen weg. Hij vraagt zich nu af wat het precieze verschil is tussen beide stukken taart.*"

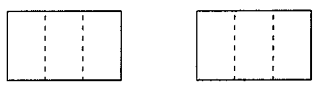
Breuken compliceren: overgaan op een gelijkwaardige breuk waarvan de teller en de noemer grotere getallen zijn.

Breuken vereenvoudigen: overgaan op een gelijkwaardige breuk waarvan de teller en de noemer kleinere getallen zijn.

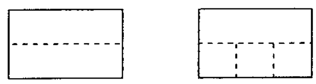
Breuk als

- *operator* de breuk als deel van iets
  2/3 van een taart

- *verdeling*
  2 repen chocolade onder 3 leerlingen gelijk verdelen, ieder krijgt 2/3:



of ook



- *vermenigvuldigingsfactor*
  2/3 van 24 is 2/3 x 24 = .

- *verhouding*
  In een klas van 30 leerlingen zijn 20 meisjes; 2/3 van de klas zijn dus meisjes .

- *kans is een bijzonder geval van breuk als verhouding*
  Als er maar één winnaar kan zijn bij een spel dat je met zijn drieën speelt, dan heb je één kans op drie, of 1/3 kans om te winnen.

Breukenstrook

visuele voorstelling van de gelijkwaardigheid van breuken.

Brutogewicht

Bruto, netto, tarra komen niet alleen voor in de 'klassieke' betekenis van 'Totaal gewicht = het zuivere product + de verpakking'.

Tarra = 3 500 kg; dat is het gewicht van de lege vrachtwagen.
Laadvermogen = 5 ton; dat is het maximaal toegelaten nettogewicht van de goederen.
Op de weegbrug lees je het brutogewicht af.

Bruto, netto, tarra gebruik je ook in de betekenis van:

Brutobedrag: het bedrag voor aftrek van kosten tegenover het nettobedrag
Brutoloon: loon zonder aftrek van sociale lasten tegenover het nettoloon
Brutowinst: winst zonder aftrek der onkosten

Cijfer

één symbool dat een aantal voorstelt in een talstelsel.
In ons tientallig stelsel beschikken we over juist tien cijfers: 0, 1, 2, 3, ... 9, ook Arabische cijfers genoemd.
Het Romeinse talstelsel gebruikt zeven letters: I, V, X, L, C, D en M

Beduidend cijfer: een cijfer met waarde verschillend van nul.

Cijferalgoritme

zie procedure om te cijferen

Constante factor

toets bij de zakrekenmachine die de laatst ingetikte bewerking herhaalt .

Conventies

geheel van stilzwijgende aanvaarde, geijkte opvattingen die in wiskunde gebruikelijk zijn .

Decimalen (uit getallenkennis)

zijn de cijfers na de komma (punt) in een kommagetal .

bij 23,458 zijn 4, 5 en 8 de decimalen

Deler van een getal

een deler van een natuurlijk getal a is elk natuurlijk getal dat precies een geheel aantal keer in a gaat.

Gemeenschappelijke deler van getallen

als een getal een deler is van die getallen, dan is het een gemeenschappelijke deler van die getallen.

Grootste gemeenschappelijke deler van getallen

is de grootste van de gemeenschappelijke delers van die getallen. (afkorting: ggd)

Kenmerk van deelbaarheid: een eigenschap die toelaat te zien of een getal deelbaar is door een zeker getal zonder de deling uit te voeren.

Onderling ondeelbaar: twee getallen zijn onderling ondeelbaar als hun grootste gemeenschappelijke deler 1 is .

Deling

zie formule

Delingstafel

een reeks opgaande delingen waarbij de deler telkens dezelfde is .

Opgaande deling

een deling met rest gelijk aan nul .

Niet-opgaande deling

een deling met rest verschillend van nul .

Didactisch contract

schrijft voor hoe de leerlingen zich moeten gedragen, hoe ze moeten denken en praten tijdens deze lessen, hoe ze op een taak, een vraag of een tussenkomst van de leerkrachten dienen te reageren
Voor vraagstukken houdt dit onder meer in:
- een vraagstuk beantwoordt je exact getalsmatig
- een vraagstuk kan slechts op één manier opgelost worden
- de correcte oplossing is te vinden door één of meer bewerkingen uit te voeren op de getallen die expliciet in de tekst gegeven staan
- het is niet toegestaan om de gegevens of het gevraagde ter discussie te stellen, noch om bij het oplossen van de opgave rekening te houden met informatie die niet uitdrukkelijk in de probleemformulering 'gegeven' is.

Dubbele getallenlijn

zie getallenas

Flexibel

afhankelijk van de omstandigheden; zelf een doelmatige oplossingsmethode kiezen op basis van inzicht in de structuur van de getallen en in de eigenschappen van de bewerkingen .

2 + 9
via 9 + 2 , 2 + 8 + 1 , 1 + 10 , ...
81 - 19
via 81 - 20 + 1 , 81 - 1 - 18, 82 - 20 , ...

Flitskaarten

dienen om de getalbeelden tot 20 te automatiseren. De leerkracht toont de kaart met het gekleurde getalbeeld in een flits aan de leerlingen. Je kan op deze kaarten ook bewerkingen zetten die de leerlingen in dat leerjaar moeten automatiseren.

7 x 8 , 5 + 8 , 72 - 9 ,...

Formule

een abstracte wiskundige notatie van een rekenkundige denkhandeling met symbolen (of de verwoording ervan).

optelling, plus(teken), som, term

in 3 + 5 = 8 is 3 + 5 de optelling, + het plus(teken) en 8 de som
3 en 5 zijn de termen van de optelling

aftrekking, min(teken), verschil term(en), aftrektal, aftrekker

in 8 - 5 = 3 is 8 - 5 de aftrekking, - het (min)teken en 3 het verschil
8 en 5 zijn de termen van de aftrekking
het aftrektal is 8 en de aftrekker is 5

vermenigvuldiging, maal- of vermenigvuldigingsteken, product, factor

in 3 x 5 = 15 is 3 x 5 de vermenigvuldiging, x het maal- of vermenigvuldigingsteken en 15 het product.
3 en 5 zijn de factoren van de vermenigvuldiging
3 is de vermenigvuldiging en 5 het vermenigvuldigtal

Schrijf de 'vermenigvuldiger' of het getal dat het 'aantal keer' aangeeft altijd links.

Zo betekent 3 x 5 duidelijk '3 keer 5' , '3 groepen met elk 5' of '3 maal 5' en niet '3 ... 5 keer nemen'.

deling, deelteken, quotiënt en rest

bij een opgaande deling zoals 15 : 3 = 5 wordt 15 : 3 de deling, : het deelteken en 5 het quotiënt genoemd.

15 is het deeltal en 3 de deler, 15 en 3 zijn de factoren van de deling bij een niet-opgaande deling zoals 17 : 3 zijn er verschillende mogelijkheden naargelang de gevraagde nauwkeurigheid. Zo kan het zijn dat je 17 : 3 tot op 1 geheel nauwkeurig uitrekent en dan wordt het quotiënt 5 en de rest 2. Maar als je 17 : 3 tot op 0,1 nauwkeurig berekent, wordt het quotiënt 5,6 en de rest 0,2.

De notatie voor een niet-opgaande deling wordt vanaf een derde leerjaar:
45 : 7 quotiënt 6 rest 3 of korter 45 : 7 = q 6 r 3
Gebruik die notatie om te vermijden dat leerlingen schrijven:
45 : 7 = 6 + 3

Gemiddelde van een aantal getallen

de som van die getallen gedeeld door het aantal getallen.

Getal

symbolische weergave van een aantal of een hoeveelheid.
Een getal kan je benoemen, kan je schrijven met cijfers en andere symbolen, kan je voorstellen met bijvoorbeeld een getalbeeld .

Ezelsbruggetje: "Wat een letter is voor een woord is een cijfer voor een getal."

Natuurlijk getal: getal dat je gebruikt voor het tellen van een aantal objecten.

- *als aanduiding voor een hoeveelheid*: naam voor een telbare hoeveelheid.
  (nul), één, twee, drie, vier, ...
- als aanduiding voor een rangorde (rangtelwoord) : drukt een volgorde uit.
  eerste, tweede, derde, ...
- als aanduiding voor een verhouding.
  3 kan vier keer in 12 (verhouding tussen 3 en 12)
- in een bewerking
  3 + 4 , 5 x 7
  2 keer 3
- als een code: het getal krijgt hier een afgesproken betekenis.
  de getallen in de barcode (streepjescode) verwijzen naar de eigenschappen van het artikel

Rond getal: getal dat in de buurt van het gegeven getal ligt en dat meer hanteerbaar is.

Getallen afronden

getallen benaderen door eenvoudiger getallen. Zoals de relatieve grootte van getallen hangen deze afrondingen af van de situatie.

Getallenbereik

het maximumgetal waarmee men binnen dat leerjaar werkt.
Voor elk leerjaar is het getallenbereik aangeduid (G11).

Getallenas

een georiënteerde rechte lijn met een afgesproken ijk (dit is de afstand van 0 naar 1) waar de getallen een unieke plaats krijgen. De getallen worden dus orde- en verhoudingsgetrouw voorgesteld.

Getallensysteem

Positioneel getallensysteem: getallensysteem waarbij de getalwaarde die bij een symbool past, afhangt van de plaats in de voorgestelde hoeveelheid.
Additief of additioneel getallensysteem: de getalwaarde die bij een zekere telbare hoeveelheid past, wordt bepaald door de som van de symbolen te maken die deze hoeveelheid voorstelt.

Graad van nauwkeurigheid

drukt uit hoe precies je rekenwerk moet zijn.
Reken uit tot op 0,1 nauwkeurig. Je rekent met twee cijfers na de komma en dan rond je af tot op één cijfer na de komma.

Grootheden

Recht- en evenredige grootheden: grootheden die in gelijke verhouding en in dezelfde richting veranderen; beide worden in dezelfde mate groter of kleiner.
prijs ⟷ *gewicht*

Omgekeerd evenredige grootheden: grootheden die in gelijke verhouding en in dezelfde richting veranderen; als de ene grootheid groter wordt, dan wordt de andere grootheid in dezelfde mate kleiner.
snelheid ⟷ *afstand*

Grootteorde van de uitkomst

een situering van de uitkomst binnen een zeker getalbereik.
Het aantal cijfers voor de komma geven, de uitkomst situeren in de omgeving van een getal of de uitkomst tussen twee gelijke plaatsen.

Halveren

de helft nemen van

Herhalingsoefening

oefening waarbij geziene leerstof nog eens behandeld wordt.

Her)structureren van een getal

het verdelen in delen die samen het getal vormen en omgekeerd.
(dikwijls wordt de term 'splitsen' gebruikt)
Herstructureren heeft te maken met de relatie zien tussen getallen, dit komt meestal overeen met 'splitsen'.
12 is 10 en 2

12 is het dubbele is van 6,
12 is de helft van 24,
12 is 15 - 3 ...

Heuristiek

zoekstrategie

Hoeveelheid

Telbare hoeveelheid: bestaat uit discontinue, apart telbare delen.
een hoeveelheid stiften, een aantal kastanjes

Niet- telbare hoeveelheid: bestaat uit een continue, niet in telbare delen splitsbare massa, is een gedeelte van iets: een stuk, een portie...
een hoeveelheid zand, een hoeveelheid klei (situeert zich meer in meten en metend rekenen)

Honderdveld	heeft een structuur die zowel lineair als vierkant is. De rijen van tien zijn lineair opgebouwd in de horizontale richting en vormen samen honderd. Start met 1 in de linkerbovenhoek en niet met 0.
Kolomsgewijs rekenen	een combinatiemethode van hoofdrekenen en cijferen. Het kan het cijferen dus zeker niet kan vervangen.
Kommagetal	getal waarbij een komma noodzakelijk is om de vereiste nauwkeurigheid te benaderen.
Materialiseren	met materiaal voorstellen
Mediaan van een aantal getallen	het middelste getal van de geordende rij getallen (bij een even aantal neemt men het gemiddelde van de middelste twee).
Metacognitieve vaardigheden	(toenemende) bewustwording en verbetering van verstandelijke prestaties door na te denken over zijn eigen oplossingsproces en dat proces te sturen.
Modelleren	kiezen van een wiskundig model.
Modelleringperspectief	je confronteert je leerlingen met een gevarieerd en authentiek (échter) opgavenaanbod je biedt ruimte voor het verwoorden van aanpak, denkbeelden en opvattingen je bespreekt met je leerlingen wat men verstaat onder een goed vraagstuk, een goede oplossing, een goede oplossingsmethode
Natuurlijk getal	zie getal
Netto	zie bruto
Niet-opgaande deling	zie deling
Niet-realistische reactie	je houdt geen rekening met ervaringen uit je dagelijks leven, je 'rekent' enkel.
Numerieke gegevens	gegevens met getallen
Omgekeerde bewerking	zie bewerking
Omgekeerd evenredige grootheden	zie grootheden
Operator	duidt een wiskundige bewerking aan zoals optellen, aftrekken,...
Opgaande deling	zie deling
Oppervlaktemodel	zie rechthoekmodel
Optelling	zie formule
Paraat kennen	onmiddellijk vanuit het geheugen het resultaat van een bewerking geven. Onmiddellijk weten en direct kunnen reproduceren.

Percent	het percent is een andere schrijfwijze voor een breuk met noemer honderd. Het is een honderdste deel. Het percentage geeft aan hoeveel honderdsten van een geheel je neemt. Je spreekt ook over 'ten honderd'. Het is een manier om een verhouding voor te stellen.
Percentstrook	visuele voorstelling van de gelijkwaardigheid van percenten. Percent als een verhouding 'op honderd' komt bij deze voorstelling sterk op de voorgrond. Daarnaast laat de percentstrook toe om percenten die niet eenvoudig zijn in een eerste stap schattend te benaderen.
Plaatswaardesysteem	zie getallensysteem
Positiekaart	

D	H	T	E,	t	h	d
		□□	□□□□	□□□□ □	□□	□□□□ □□□

Positiemateriaal	materiaal dat helpt om de waarde van cijfers in getallen voor te stellen .
Procedure om te cijferen (cijferalgoritme)	een schriftelijke rekenwijze opgebouwd uit een vaste rij opeenvolgende handelingen die zeker tot de oplossing leidt. Dit is verschillend van het noteren van tussenstappen bij hoofdrekenen.
Procent	de term percent krijgt een lichte voorkeur op procent.
Product	zie bewerking en formule
Progressieve complicering	je biedt het algoritme reeds van in het begin met eenvoudige getallen aan. Nadien verken je het algoritme verder door de getallen 'moeilijker' te maken ('progressief compliceren').
Progressieve schematisering	je bouwt het algoritme op via een reeks 'verkortingen' waarbij het algoritme groeit naar zijn meest abstracte vorm ('progressief schematiseren').
Recht- en evenredige grootheden	zie grootheden
Rechthoekmodel of oppervlaktemodel	de breuk is voorgesteld als een deel van de oppervlakte van een rechthoek. Dit model is zeker nuttig als ondersteuning van 'breuk x breuk' (B28b) en bij 'delen van een breuk door een natuurlijk getal' (B29a).
Rekenhandeling	het manipuleren van al dan niet telbare hoeveelheden met de bedoeling geleidelijk aan een hoger niveau van denken te bereiken.
Rekenvoordelen	handige werkwijzen die je kan toepassen bij hoofdrekenen zie onder meer wisselen, schakelen... steunend op eigenschappen van en relaties tussen bewerkingen.

Rekenwijzen

dit leerplan onderscheidt vier rekenwijzen: hoofdrekenen, cijferen, schattend rekenen en rekenen met de zakrekenmachine.

Relatieve grootte van getallen inschatten

naast de absolute grootte die slaat op de hoeveelheid en die onveranderd blijft, verwijst de relatieve grootte naar de situatie waarin het getal gebruikt wordt.

Quotiënt

zie bewerking en formule

Schakelen (associativiteit)

zie bewerking

Schattend rekenen

benaderend rekenen door de gegeven getallen te vervangen door eenvoudiger getallen die in de omgeving van deze getallen liggen. Dit gebeurt in relatie met de gewenste nauwkeurigheid en met de gebruikte bewerkingen. Daarbij moet je de werkwijze verantwoorden.

- *bij 205,2 : 7,3 is de benadering 210 : 7 erg handig als eerste schatting,*
- *bij 205,2 + 7,3 kan de benadering 205 + 7 en de benadering 206 + 8 de uitkomst laten situeren tussen grenzen*
- *bij 205,2 x 7,3 vormt 200 x 7 een voldoende benadering als schatting voor je begint te cijferen*

Schrijfschema

D	H	T	E,	t	h	d
		2	4,	5	2	7

Sleutelwoordstrategie

voortgaan op een sleutelwoord om een bewerking te kiezen.
Aan 'verliezen' de bewerking '-' te koppelen, of aan 'keer' de bewerking 'x'.

Som

zie bewerking en formule

Splitsen en verdelen (distributiviteit)

zie bewerking

Standaardprocedure

een vooropgezette werkwijze die tot de juiste oplossing voert.

Structureren van een hoeveelheid

een ordening aanbrengen in een hoeveelheid om die beter te kunnen overzien.

Symbool

wiskundig teken dat een wiskundig begrip voorstelt of een wiskundige bewerking aanduidt, letter of lettergroep die een grootheid of een eenheid voorstelt.

Tafelproducten

uitkomsten van de tafels van vermenigvuldiging. Soms spreekt men ook over de optel- en aftrektafels.

Talstelsel

geheel van afspraken binnen een systeem waarmee aantallen worden voorgesteld.

tientalligheid:
verwijst naar de groeperingen per tien waarmee getallen worden voorgesteld.
plaatswaardesysteem (of positiestelsel):
systeem waar de symbolen een waarde krijgen naargelang de plaats waar ze staan.
additief stelsel:
systeem waar de waarden worden samengeteld.

Tarra

zie bruto

Telwoord

woord dat refereert aan een getal.

Term

woord dat in wiskunde gebruikt wordt en een eigen, scherp omlijnde betekenis heeft.
Alle termen die leerlingen in de basisschool moeten kennen, zijn in het leerplan vermeld.

Veelvoud

als je een getal een aantal keer neemt, dan heb je een veelvoud van dat getal.

Gemeenschappelijk veelvoud van getallen:
als een getal een veelvoud is van die getallen dan is het een gemeenschappelijk veelvoud van die getallen.
Kleinste gemeenschappelijk veelvoud van twee getallen:
is het kleinste van de gemeenschappelijke veelvouden, verschillend van nul, van die getallen. (afkorting: kgv)

Verbredingsoefening

oefening waarbij de geziene leerstof verbreed wordt naar andere toepassingsgebieden.

Verdiepingsoefening

oefening waarbij de geziene leerstof uitgediept wordt.

Verdubbelen

het dubbele nemen van

Verhoudingsgetrouwe afbeeldingen

afbeeldingen waarbij de corresponderende afmetingen in dezelfde verhouding (G12) staan tot de realiteit.

Verhoudingstabel

tabel waarbij getallen verhoudingsgewijs worden genoteerd.

aantal kg	2	4	6	10	...
prijs in euro	2,5	5	7,5	12,5	

Vermenigvuldiging

zie formule

Vermenigvuldigingstafel

een reeks vermenigvuldigingen waarbij het vermenigvuldigtal telkens hetzelfde is.

Verrijkingsactiviteit rijker maken, er nieuwe woorden of uitdrukkingen aan toevoegen.

Verschil zie bewerking en formule

Verwiskundigen Het omzetten van eenvoudige situaties in formules. Dit noemt men ook 'mathematiseren'.

Vraagstukken

Soorten vraagstukken

Typevraagstukken of standaardopgaven:
meestal ligt de klemtoon bij zo'n opgaven niet op het zelf ontdekken van een mogelijke oplossingswijze maar op het toepassen van een rekentechniek.

Enkelvoudige vraagstukken:
vraagstukken waarvoor slechts één bewerking nodig is om tot de oplossing te komen.

Kettingvraagstukken:
een aaneenschakeling van enkelvoudige vraagstukken; na elke denkstap wordt een vraag gesteld.

Samengestelde vraagstukken:
vraagstukken waar meerdere bewerkingen en/of meerdere denkstappen nodig zijn om de oplossing te bereiken.

Vraagstukken met verhoudingen:
vraagstukken met recht- en omgekeerd evenredige grootheden, mengen, inwisselen, ...

Veranderingssituatie:
is iets dynamisch: er gebeurt iets waardoor de starthoeveelheid verandert naar de eindhoeveelheid.
Ik had 20 euro en krijg 3 euro bij.
Hoeveel euro heb ik nu?

Combinatiesituatie:
je vertrekt van twee afzonderlijke hoeveelheden die samen een derde totaalhoeveelheid vormen.
De twee hoeveelheden voeg je niet echt samen. Er is geen verandering gebeurd.
In mijn broekzak zit 15 euro. Ik vind in mijn portefeuille 17 euro.
Hoeveel euro is dat samen?

Vergelijkingssituatie:
het gaat om twee afzonderlijke hoeveelheden die je onderling vergelijkt en waarbij het verschil tussen beide een rol speelt.
Ik heb 24 euro en mijn broer heeft 7 euro meer.
Hoeveel euro heeft mijn broer?

Wisselen (commutativiteit) zie bewerking

Zelfreflexie

kritisch (leren) nadenken over de eigen wiskundige activiteiten (en die van anderen), over de eigen manier van wiskundeleren en over (aspecten van) de wiskundesystematiek.
Wie in staat is om kritisch zijn eigen aanpak te evalueren en bij te sturen is 'lerende'. Dit 'nadenken over' of 'reflecteren' is de motor van het denken.

ZRM

afkorting voor zakrekenmachine