GETALLENKENNIS

Toelichtingen

Vlaams Verbond van het Katholiek Basisonderwijs 2001

Tweede druk 2002

INHOUD

TEN GELEIDE

Het leerplan Wiskunde deelt de doelen en leerinhouden in vijf groepen in: getallenkennis, bewerkingen, meten en metend rekenen, meetkunde en domeinoverschrijdende doelstellingen.

Bij elk domein publiceert het VVKBaO 'Toelichtingen'. Dit deel bevat de 'Toelichtingen bij het leerplan wiskunde: getallenkennis'. Het reikt concrete suggesties en voorbeelden aan om in de klas en in de school aan de doelen van getallenkennis te werken. Het beschrijft wat breedvoeriger de aspecten van getallenkennis en onderbouwt en illustreert de nieuwe visie van goed wiskundeonderwijs.

De toelichtingen volgen de indeling van het leerplan. Zo verwijst '1.2.1 Hoeveelheden ordenen en vergelijken' naar dezelfde rubriek in het leerplan.

De rubriek '1.2.5 Breuken' is geschreven vanuit een totale samenhang met andere domeinen zoals bewerkingen en meten en metend rekenen en volgt daarom een eigen indeling.

In de linker kantlijn staat het leerplandoel vermeld waar de activiteit een bijdrage toe levert.

Per doelstelling volgen suggesties om aan dat specifieke doel te werken, vanaf het begin tot aan het einde van de leerlijn. De verticale samenhang is van groot belang voor een goede begripsvorming en voor het ontwikkelen van probleemoplossende vaardigheden en goede attitudes binnen het vak wiskunde. Bij elke suggestie vind je concrete voorbeelden. Die zijn cursief gedrukt.

Soms merk je in de linker kantlijn ook doelen uit andere domeinen: bijvoorbeeld een doel over meten en metend rekenen (MR). Dat geeft aan dat je al werkend aan getallenkennis, tegelijk ook doelen uit andere domeinen kan meenemen. Als je een probleem of een situatie wiskundig benadert, werk je immers vaak aan de horizontale samenhang tussen de doelen uit verschillende domeinen. De processen die leerlingen doorlopen zijn niet zo streng in hokjes te plaatsen. Soms zijn er ook domeinoverschrijdende kennis, vaardigheden en attitudes in het spel. Ook die staan in de kantlijn aangegeven.

In de begrippenlijst achteraan tref je een omschrijving aan van elk begrip en van de wiskundige terminologie die in dit leerdomein voorkomt.

Hoe kun je van de 'Toelichtingen' gebruik maken om binnen je klas je onderwijs te organiseren?

- Als leerkracht in de praktijk of als student in de lerarenopleiding kan je met deze toelichtingen het leerplan concretiseren.
- Je ontdekt een horizontale samenhang door de verwijzingen naar andere domeinen.

- Je krijgt meer zicht op de verticale samenhang.

  - Je weet wat je aan voorkennis bij je leerlingen mag verwachten.

  - Je kunt stappen terugzetten in de leerlijn wanneer bij sommige leerlingen leerproblemen opduiken.

  - Je begrijpt waaraan je collega's in de daaropvolgende leerjaren nog dienen te werken.

- Je vindt praktische voorbeelden bij elke doelstelling. Misschien was je precies op zoek naar meer praktische voorbeelden om de nieuwe visie van goed wiskundeonderwijs in jouw klas en school concreet te maken. Die praktisch voorbeelden kunnen je ook helpen om goede toetsvragen op te stellen; zeker wanneer je werkt met een doelstellingenrapport.

- In de begrippenlijst vind je precieze omschrijvingen van de inhoud van een begrip of term. Niet om ze door de leerlingen als definitie uit het hoofd te laten leren, wel om ze zuiver te omlijnen voor de leerkracht.

We hopen met deze publicatie alle leerkrachten die goed wiskundeonderwijs willen verzorgen, een dienst te bewijzen.

Deze publicatie werd voorbereid door de leden van de werkgroep 'Toelichtingen bij getallenkennis': Ingrid De Buysscher, Theo Gielis, Herman Jacobs en Marijke Van de Ven. We danken hen voor hun medewerking. Onze dank gaat ook naar hen die bereid waren de ontwerpteksten te lezen en van commentaar te voorzien.

Brussel, april 2001

Gaby Tersago, Antoine Lievens en Marleen Duerloo

1.1 INLEIDING

Getallen zijn onmisbaar in alle leerdomeinen van wiskunde. Zo vind je getallen in bewerkingen bij rekentechnieken als hoofdrekenen, schattend rekenen, cijferen en werken met de zakrekenmachine. Bij metend rekenen, meetkunde en domeinoverschrijdende doelen zijn getallen een onmisbare hulp om situaties te verwiskundigen.

Kennismaking

In de doelen van de eerste acht rubrieken worden de leerinhouden beschreven die kinderen kennis laten maken met de wereld van getallen.

Hoeveelheden vergelijken en ordenen

Wanneer kinderen gestructureerde en ongestructureerde hoeveelheden sorteren en vergelijken, verwerven zij kennis, inzichten en vaardigheden die de basis vormen van getalbegrip.

Tellen

Tellen ondersteunt sterk de ontwikkeling van het getalbegrip. Die vaardigheid heb je nodig om vlot te kunnen rekenen.

Hoeveelheden herkennen en vormen

Kinderen leren hoeveelheden globaal herkennen en vormen. Door hoeveelheden en getallen te koppelen zijn de getallen in de aanvangsfase van de basisschool geen abstracte begrippen.

Natuurlijke getallen

Natuurlijke getallen zijn de dragers van veel rekenwerk in de lagere school. Daarom is het belangrijk dat kinderen inzicht verwerven in de getalstructuur, de tientallige opbouw van ons positioneel talstelsel en in de rangorde van de getallen.

Breuken

Eerst moeten kinderen een voldoende sterk onderbouwd breukbegrip verwerven. Daarbij werken ze met breuken in verschillende verschijningsvormen. Pas dan leren ze breuken lezen, schrijven, vergelijken en ordenen.

Kommagetallen

Van jongsaf aan komen kinderen met kommagetallen bij geldwaarden in aanraking. Daarom leren ze eerst kommagetallen bij geldwaarden lezen. Later leren ze kommagetallen interpreteren en gebruiken als een uitbreiding van het gekende getallenbereik.

Percenten

Percenten interpreteren en gebruiken in betekenisvolle situaties geeft vulling aan het begrip percent. Kinderen leren ook de omzettingen tussen percenten, kommagetallen en breuken.

Negatieve getallen

In de basisschool is het voldoende dat kinderen in concrete situaties negatieve getallen ervaren en dat ze deze getallen kunnen lezen, schrijven en in eenvoudige gevallen vergelijken.

Uitbreiding in de diepte

Wanneer kinderen volgende doelen bereiken, verdiepen ze de kennis van en inzicht in de getallen.

Delers en veelvouden

Delers en veelvouden kunnen opzoeken en enkele kenmerken van deelbaarheid kunnen gebruiken, zal van nut zijn bij bewerkingen.

Andere talstelsels

Kinderen verkennen de opbouw van andere talstelsels en de schrijfwijze van getallen in die talstelsels.

Getallen schatten en afronden

De relatieve grootte van getallen schatten en getallen afronden ondersteunen het schattend rekenen.

Uitbreiding in de breedte

Toepassingen

Deze doelen verbreden de getallenkennis bij kinderen. Ze verhogen de gebruikswaarde van de getallen als middelen om de werkelijkheid te beschrijven, te begrijpen en te beheersen.

1.2 DOELEN EN LEERINHOUDEN

1.2.1 HOEVEELHEDEN VERGELIJKEN EN ORDENEN

G1

Wanneer kinderen de wereld verkennen, gaan ze spontaan om met hoeveelheden. Al handelend, denkend en pratend over hoeveelheden verwerven ze stap voor stap de termen.

Bied kinderen zoveel mogelijk kansen tot ontdekking. Je kan dit doen door gerichte activiteiten op te zetten. Dit kan ook tijdens spelmomenten, zowel geleide als vrije.
Voorzie een uitdagend materiaalaanbod dat kinderen veel sorteer- en vergelijkingskansen biedt.

G1a)

- ERVARINGEN OPDOEN MET HOEVEELHEDEN EN AANTALLEN

  - *Er kan veel zand in die emmer.*
  - *Er zit weinig melk in dat bekertje.*

Ook het begrip 'niets' is een ervaring.
In de context van het getalbegrip betekent hoeveelheid aantal.

- *Ze hebben veel bouwblokken.*
- *Ze hebben weinig fietsjes.*

De jongste kleuters kunnen 'één', 'twee', ('drie', 'vier') op het zicht herkennen. Ze hoeven daarvoor niet te tellen, want dat kunnen ze nog niet. Ze herkennen deze kleine aantallen globaal, als een ruimtelijk visueel beeld.

Vindmateriaal is een stimulerend aanbod voor het ervaren van aantallen.

- *In de herfst: een bad met eikels of kastanjes*
  In de lente: een kom met grote bonen
- *Bij het thema bouwen, timmeren: schroeven, moeren, rondelletjes ...*
- *Verder nog: keitjes, knikkers, knopen, houten parels, kurken stoppen ...*

De kleuters kunnen met het materiaal experimenteren. Ze krijgen potjes, doosjes, eierkartons ... waar ze de spulletjes insteken en uithalen.
Spontaan gebruiken ze daarbij termen als: veel, weinig, niets, meer, minder, evenveel of aantallen als één, twee, drie ...

- STILAAN BEGINNEN KINDEREN HOEVEELHEDEN TE VERGELIJKEN.

  - *Ze stellen spontaan vast dat er in de klas veel kinderen zijn; thuis zijn er weinig.*
  - *In de ene speelhoek zijn meer materialen aanwezig, in de andere minder.*
  - *Bij een gezelschapsspel ontdekken ze dat er pionnetjes over zijn.*
  - *Wanneer ze de tijdschriften uitdelen, blijken er enkele te kort te zijn om elk één te geven.*
  - *Er zijn te weinig auto's op het verkeerstapijt of bordjes in de keukenhoek.*

- *Te veel kleuters in een bepaalde hoek kan niet.*

In de loop van de dag gebruiken kinderen vaak spontaan termen waarbij ze hoeveelheden vergelijken. Knoop daarover een gesprek aan met het kind en/of bied bijkomend materiaal aan.

Met kleine spullen kunnen veel spelletjes gespeeld worden die gericht zijn op vergelijken.

- *Als extra stimulans zijn op doosjes of potjes een aantal bolletjes getekend. Kleuters die er aan toe zijn, zullen die zeker opmerken en het juiste aantal in het doosje steken.*
- *Op de vakken van de dobbelsteen staan een aantal kastanjes of bolletjes, aangepast aan de mogelijkheden van de kleuters. Ook 'niets' staat op de dobbelsteen: dan mag je nog eens rollen. Op het einde van het spel vergelijken de kleuters het aantal gewonnen kastanjes (op zicht, met de 1-1 verbinding of door te tellen, naargelang de leeftijd of het ontwikkelingsniveau)*
- *Gooi een dobbelsteen. Neem evenveel kastanjes als de dobbelsteen zegt en leg die in je eigen emmer.*

Leer kleuters sorteren naar aantal, groepjes met 'evenveel' maken.

Leg bij elkaar: zakjes met evenveel knikkers, prentjes met evenveel dieren, paddestoelen met evenveel stippen, huizen met evenveel vensters ...

Daarna volgt seriëren naar aantal of rangschikken van minder naar meer (of omgekeerd).

Leg zakjes knikkers op een rijtje van minder naar meer, huizen op een rij van minder naar meer vensters ...

G1b)

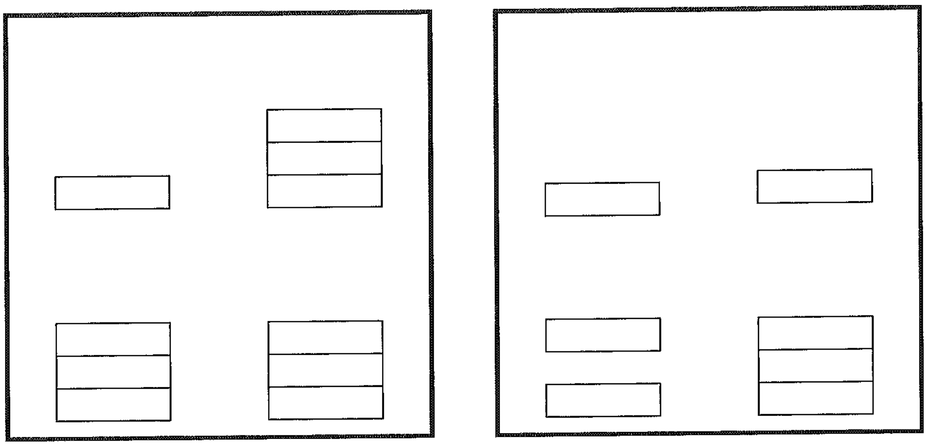
Al handelend, denkend en verwoordend vergelijken kinderen hoeveelheden. Ze gebruiken daarbij de termen 'is meer dan', 'is minder dan', 'is gelijk aan' en 'is niet gelijk aan'.

- *Kinderen ontdekken bij het spel met driedimensionaal materiaal dat er bij de boerderijdieren meer koeien zijn dan paarden. Ze komen tot die vaststelling door de dieren gewoon naast elkaar te zetten.*
- *Je kunt een stap verder zetten door op een prent aan het magneetbord (tweedimensionaal) koeien en paarden te laten plaatsen en hun aantallen te vergelijken.*
- *Het wordt nog moeilijker als de kinderen de aantallen van dieren op een prent vergelijken. Ook tijdens een rollenspel binnen hetzelfde thema kunnen kinderen met hoeveelheden omgaan.*
- *Een memory op aantal: verschillende doosjes worden gevuld met een aantal eikels. Om de beurt mogen de kleuters twee doosjes uit de hoop kiezen en ze openmaken. Als er 'evenveel' eikels in de doosjes zitten, mogen ze die in hun eigen emmertje leggen. Als het er 'niet evenveel' (meer, minder, één meer...) zijn, leggen ze de doosjes terug bij de hoop.*
- *Na een memoryspelletje vergelijken kleuters hun kaartjes met die van een andere speler vanuit de 1-1 verbinding. Als de aantallen*

niet te erg verschillen, kunnen kleuters verwoorden: "Jij hebt er twee meer", "Ik heb er twee minder".

Begin bij het vergelijken van hoeveelheden altijd met hoeveelheden waarbij het verschil duidelijk merkbaar is. De kleuters vergelijken de aantallen op het zicht.
Werk later met hoeveelheden die minder van elkaar verschillen.
Laat hen vergelijken met de 1-1 verbinding (naast elkaar plaatsen, tegelijkertijd één wegnemen, ...), door te turven of door te tellen: evenveel, meer, minder.

Vraag aan de kinderen in welke kast de meeste dozen liggen. Vermoedelijk zullen ze niet tellen, maar zullen ze de structuur van beide tekeningen vergelijken. Door een 1-1 verbinding tussen beide tekeningen te leggen, zie je direct waar er meer zijn.

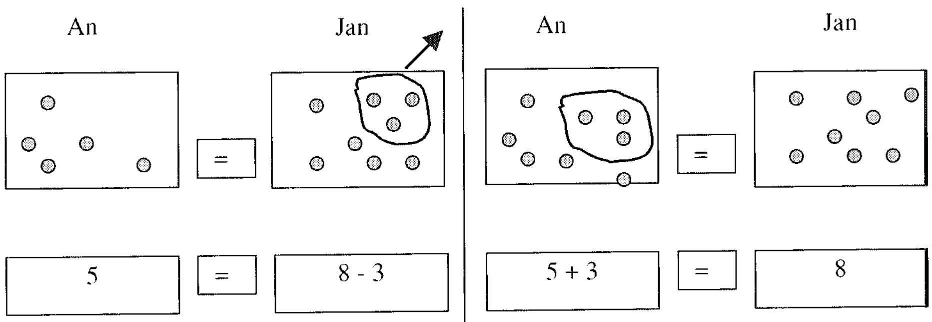


Bied vanaf het tweede leerjaar herhalings-, verdiepings- of verbredingsoefeningen aan met de termen 'is meer dan', 'is minder dan', 'is gelijk aan', en 'is niet gelijk aan'. Werk binnen het getallenbereik dat in doelstelling G11 voor dat bepaalde leerjaar is aangeduid.

G1c)

In een volgende fase gaan kinderen hoeveelheden meer precies vergelijken. Daarbij antwoorden ze op vragen als 'hoeveel meer dan', 'hoeveel minder dan'.

- *Hoeveel knikkers heeft An minder dan Jan?*



Bewerkingen
8 - 3 = 5
- *Antwoordzin*
An heeft 3 knikkers minder dan Jan

Bewerkingen
5 + 3 = 8
- *Antwoordzin*
An heeft 3 knikkers minder dan Jan

- *X meer dan Y: er zijn drie koeien meer dan er varkens zijn, maar er zijn twee varkens meer dan paarden.*

Verwoordingen met de termen 'x meer dan y' en 'x minder dan y' zijn moeilijker dan de opgesomde verwoordingen bij G1a en G1b. Daarom worden die verwoordingen pas aangezet in het eerste leerjaar.

- *Drie is twee meer dan ...*
- *Twee is vijf minder dan ...*

Wanneer kinderen de vergelijking van aantallen zo verwoorden, leunt dat sterk aan bij de verwoording van rekenhandelingen. (B1)
Geef in alle leerjaren van de lagere school verdiepings- of verrijkingsactiviteiten met die termen. De leerlingen werken wel binnen het opgegeven getallenbereik. (G11)

G1d)

Vanaf het eerste leerjaar stellen de leerlingen de vergelijkingen van aantallen voor met wiskundige symbolen.
Aanvankelijk lezen de kinderen deze tekens '=', '≠', '>' en '<' als 'is evenveel als', 'is niet evenveel als', 'is meer dan', 'is minder dan'.
Later verwoorden de kinderen ze als 'is gelijk aan', 'is niet gelijk aan', 'is groter dan', 'is kleiner dan'.

Hoe je de tekens '=', '≠', '>' en '<' aanleert, vind je uitgebreid terug bij het leerdomein meten en metend rekenen.

- *Jan heeft 6 snoepjes, Piet heeft er 3.*
  Als Jan er 4 opeet, heeft hij dan meer of minder snoepjes dan Piet?
- *Vul in: is meer dan, is minder dan, is evenveel:*
  6 - 4 ... 6 - 2
  8 - 2 ... 5 - 2
  7 - 4 ... 6 - 3

G2

Snel ervaren kinderen wat rangorde betekent. De rangorde van een getal duidt de plaats van het getal in de rij aan.
Tijdens de activiteiten in het kleuteronderwijs zijn er heel wat mogelijkheden om rangordetermen te gebruiken.

- *Wat zit er in de eerste doos? Wat berg je op in de laatste?*
- *Waar leg je de kroonkurken? In de middelste doos op de tweede rij.*
- *Kinderen willen allemaal wel eens eerst aan de beurt komen of het eerst in de rij staan. Er mag niemand voor hen staan. Jan komt na Koen aan de beurt.*
- *De laatste sluit de deur.*
- *Naast Katrien zit Bert. Katleen zit tussen Maarten en Petra.*
- *Bij het prentkijken stond er op de vorige prent een krokodil. Zou ze er op de volgende prent nog zijn?*
- *Bij een kabouterliedje is de eerste z'n muts verloren. De tweede streelt z'n lange baard. De derde heeft zulke grote oren en de vierde rijdt op een houten paard.*

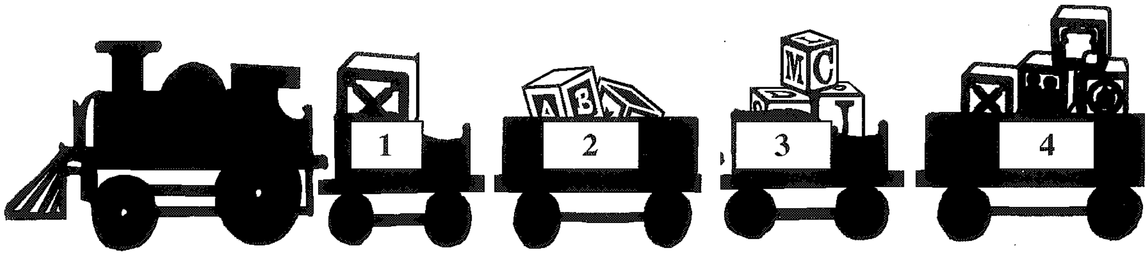
Ook in het eerste leerjaar wordt aan dit doel systematisch gewerkt.

- *Voor de eersteklassers komt 5 na 4 .*

- *'k' is de eerste letter in het woord 'kar'. De letter 'a' komt in datzelfde woord voor de letter 'r'.*

Wanneer je aan het hoeveelheidsbegrip 'middelste' werkt, bied je aanvankelijk een oneven aantal getallen aan. Wanneer je toch met even aantallen te maken krijgt, laat je kinderen de middelste twee nemen. Talloos zijn de klassituaties, de spelletjes, de liedjes enz. waar kinderen vergelijkend en ordenend met hoeveelheden bezig zijn!

- *Klasnummer*
- *Kapstokjes in de gang*
- *Nummer laten trekken en nadien op rangorde staan*
- *Nummer trekken bij de slager*
- *Huisnummers (even - oneven)*



1.2.2 TELLEN

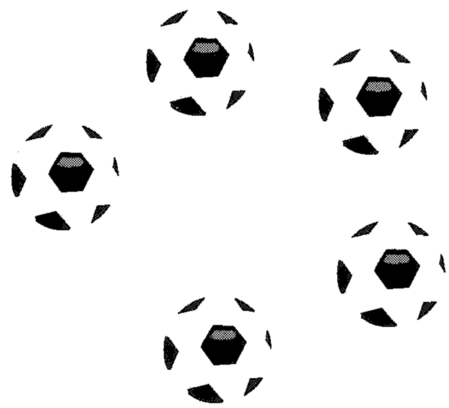
G3

Vanaf het moment dat de verbale mogelijkheden van een kind het toelaten, beginnen kinderen spontaan akoestisch te tellen. Akoestisch tellen heeft een puur ritmisch karakter.
Veel jonge kinderen tellen door getallen willekeurig achter elkaar te plaatsen 1, 6, 5, 2, 4. Ze imiteren gewoon het tellen van de volwassenen. Het is opmerkelijk dat kinderen zo'n getallenrij vaak op een identieke manier herhalen. Blijkbaar hebben ze een eigen ordening in hun tellen opgebouwd.
Oefen tijdens het spel de juiste telrij in. Denk maar aan de vele versjes en liedjes die dat stimuleren.

- *"Eén, twee, drie, vier, hoedje van ... "*
- *Bij verstoppertje: "Eén, twee, drie, vier, vijf; ik kom!"*
- *Aan de start van een loopspel: "Eén, twee, drie, start!"*
- *Hoe vaak zeg je niet: "Ik tel tot vijf en dan moet alles opgeruimd zijn. Eén, twee, drie, vier, vijf."*

G4

Synchroon tellen betekent dat je een verbinding legt tussen de rij telwoorden en de corresponderende hoeveelheden.
Toon om die verbinding te leren leggen de passende hoeveelheid wanneer jij of een kind een getal zegt.



Voorbeelden van activiteiten waarbij de kinderen synchroon tellen:

- *Aftelrijmpjes waarbij je telkens iemand aanraakt.*
- *Het ganzenbordspel.*

Synchroon tellen ontwikkelt zich bij kinderen als volgt:

- eerst neemt een kind het voorwerp, legt het en verplaatst het wanneer het synchroon telt
- dan telt het voorwerpen door ze aan te raken of aan te wijzen zonder ze te verplaatsen
- tenslotte telt het kind de voorwerpen al kijkend.

Synchroon tellen hoeft niet altijd in een vast ritme te gebeuren. Je kan ook in het ritme variëren.

- *1 - 2 - 3 - 4 - 5 - 6, vast ritme*
- *1 - 2 - 3 - 4 - 5 - 6, wisselend ritme*

G5

Resultatief tellen is tellen om een aantal te bepalen. Resultatief tellen groeit uit het synchroon tellen wanneer het kind het antwoord kan geven op de vraag 'Hoeveel voorwerpen zijn er?' Aanvankelijk zullen kinderen – alhoewel ze synchroon hebben geteld - opnieuw tellen als de leerkracht die vraag stelt. Bij kinderen groeit langzaam het inzicht dat het laatstgenoemde getal uit de telrij de totale hoeveelheid aangeeft.

Voorbeelden van activiteiten waarbij kinderen resultatief tellen:

- *Het aantal afwezige kinderen op het aanwezigheidsbord tellen.*
- *Tellen hoeveel kinderen er in de poppenhoek mogen spelen.*
- *Tellen bij gezelschapsspellen met dobbelstenen.*
- *Op leesfriezen of opdrachtkaarten tellen hoeveel stuks van bepaalde materialen kinderen dienen te verzamelen voordat ze aan de slag kunnen gaan.*
- *Tellen hoeveel keer ze nog moeten slapen vooraleer de Sint komt of vooraleer Tim jarig is.*
- *Hier zijn kastanjes. Vorm groepjes van vijf.*

Maak bij het tellen een kringbeweging (groepering) rond het genoemde aantal. Zo is "drie" niet het derde voorwerp, maar wel het aantal dat past bij de groepering van drie voorwerpen.

Naast visueel waarneembare dingen kun je ook dingen tellen die auditief waarneembaar zijn of dingen die nu niet waarneembaar zijn.

- *Tel met de ogen dicht hoeveel slagen ik op de trom geef.*
- *Hoe dikwijls rinkelde de telefoon?*
- *Hoeveel kinderen speelden voor de speeltijd aan de zandtafel?*
- *Hoe dikwijls slaat de torenklok?*

Rijke telkansen vind je binnen en buiten de klas en in allerhande activiteiten. Zo wordt er nogal wat geteld bij spelen op de speelplaats. In klashoeken liggen de telactiviteiten voor het rapen. Buiten de rekenmomenten kan je bijvoorbeeld bij taalspellen woordstukjes tellen.

Je begint altijd te tellen vanaf één. Pas als de telrij voldoende is ingeoefend, kan het getal nul aan bod komen.

MR66 en MR70

Pasgeborenen beginnen onmiddellijk hun eerste levensjaar en niet hun 'nulde' jaar. Het jaar 'nul' heeft hier geen betekenis. Zo kent onze jaartelling ook het jaar 0 niet. Men is direct beginnen tellen met het jaar 1. Die manier van tellen heeft voor een paar rare fenomenen gezorgd.
"Onze tijdrekening begint met de eerste dag van het jaar 1. De eerste eeuw loopt van het jaar 1 tot en met het einde van het jaar 100. De eerste duizend jaren verliepen van het jaar 1 tot en met het einde van het jaar 1000, het tweede millennium gaat tot het einde van het jaar 2000. Maar voor astronomen begint de 21e eeuw wél op 1 januari 2000. Zij rekenen met een jaar nul. Er is niemand anders die zo rekent ...
Wij hebben in onze tijdrekening geen jaar nul. Op de laatste seconde van het jaar 1 voor Christus volgt de eerste seconde van het jaar 1 na Christus. Dat heeft vreemde gevolgen. De Romeinse keizer Claudius is geboren in 10 voor Christus en stierf in 54 na Christus. Werd hij dan

10 + 54, dus 64 jaar oud? Neen, hij was pas 64 - 1= 63 jaar oud, want er moet een jaar tussenuit ..."
[uit, André Peeters, 21e eeuw begint in 2001, NB 28-29/09/1996]

G6

Oefen regelmatig het terugtellen. Terugtellen is vanaf een willekeurig punt in de getallenrij 'aftellen'. Kinderen gebruiken het terugtellen soms als een eenvoudige strategie bij aftrekkingen.

- *Je knipt telkens een stukje van de strookkalender af. "Nog tien, negen, acht, zeven, zes, vijf..... dagen."*
- *De kinderen tellen af bij de start van een raket. (nul = start)*
- *"Hoe oud ben je vandaag geworden?" "Vijf." "Hoe oud was je voordien?" "Vier." "En hoe oud daarvoor?" "Drie."*
- *Gezelschapsspellen bieden mogelijkheden om terug te tellen. Het clownspel (ringen gooien over de armen van de clown): bij het begin van het spel heeft iedere speler vijf hoepels. Bij de eerste worp heeft hij er nog vier. Bij de volgende worp nog drie, twee, één, nul.*
- *"Liggen er hier wel zeven potloden? We tellen terug. Ik neem telkens een potlood weg."*
- *"Bij start mag je beginnen: vijf, vier, drie, twee, één, start!"*
- *"Tel op de getallenas terug met sprongen van twee. Begin bij dertien."*

Doortellen is voortgaan met tellen vanaf een willekeurig punt in de getallenrij. Bijvoorbeeld doortellen vanaf 15. In het eerste leerjaar kunnen kinderen doortellen om optellingen uit te voeren.

- *Bart telt de kerstballen aan de kerstboom: "Eén, twee, drie, vier." "Hoeveel hebben we er al?" "Vier." "O.K., dan tellen we verder." "Vijf, zes... ".*
- *Tel van vijf tot tien.*
- *Tel met sprongen van 1 000 op de getallenas vanaf 88 500*
  88 500 - 89 500 - 90 500 - 91 500 - 92 500 ...

Als kinderen voldoende kunnen tellen om een aantal te bepalen (G5) dan kunnen ze leren sprongsgewijs tellen.

- *Het aantal kinderen per twee tellen om een betere vat op de hoeveelheid te krijgen en om sneller te tellen.*
- *Vijffrankstukken op stapeltjes van 10 leggen, dan per 50 tellen om het totale bedrag te bepalen.*
- *Tellen per 10 bij verstoppertje.*

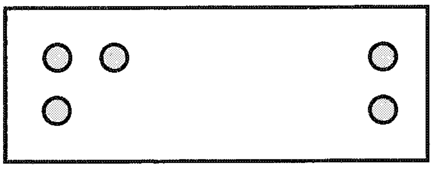
Om kinderen sprongsgewijs te leren tellen, kun je ze eerst ritmisch laten tellen om ze dan sprongsgewijs – bijvoorbeeld per 2 – te leren tellen.

1, 2, 3, 4, 5, 6, 7, 8, 9 eerst ritmisch tellen
dan: 1, 3, 5, 7, 9 sprongsgewijs tellen per twee

1.2.3 HOEVEELHEDEN HERKENNEN EN VORMEN

G7

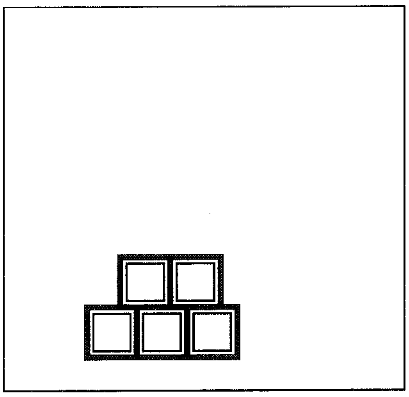
Kinderen leren kleine hoeveelheden onmiddellijk herkennen zonder te tellen. Teloefeningen dragen ertoe bij dat kinderen zo'n hoeveelheden vlugger overzien. De plaats die de voorwerpen innemen in de ruimte bepaalt mee of kinderen de hoeveelheid onmiddellijk visueel kunnen vatten. Goed gestructureerde hoeveelheden zijn vlugger te herkennen. Kleuters leren de hoeveelheden voorstellen (representeren) op verschillende manieren: ze gebruiken telwoorden, ze tonen het juiste aantal vingers, sommigen herkennen al getalbeelden en cijfers.
Getalbeelden zijn een goede visuele ondersteuning voor kinderen. Materialen met getalbeelden zijn onder meer: dobbelstenen, dominostenen, speelkaarten, splitskaarten waarvan je de hoeveelheden in een flits moet herkennen.

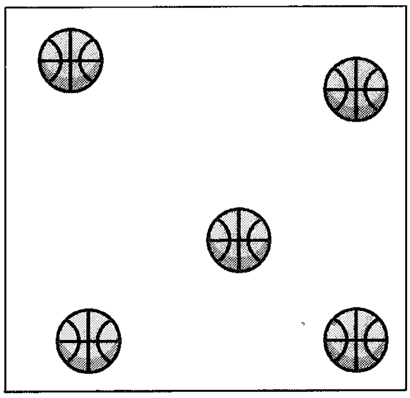


G8

Kinderen verwerven geleidelijk aan het inzicht dat een hoeveelheid niet afhankelijk is van de plaats en de ordening in de ruimte, noch van bepaalde eigenschappen van de dingen. Aanvankelijk denken kinderen dat bijvoorbeeld een rij voorwerpen die meer ruimte inneemt dan een compactere rij met evenveel voorwerpen uit een groter aantal voorwerpen bestaat.
Laat kinderen regelmatig met hoeveelheden handelen en ze tellen. Door ze te confronteren met hun eerste indruk zien ze in dat ze zich hebben laten misleiden.

- *Kinderen doen tien knikkers in een breed glas. Daarna doen ze tien dezelfde knikkers in een smal glas. Wanneer je hen vraagt in welk glas de meeste knikkers zijn, laten ze zich leiden door de hoogte van het glas.*
- *"Zijn er meer blokjes of zijn er meer rondjes?"*





1.2.4 Natuurlijke getallen

G9

Mensen interpreteren en gebruiken getallen op verschillende manieren. Zo gebruiken ze bijvoorbeeld een getal als:

- een aanduiding van een hoeveelheid: *6 appels*;
- een aanduiding van een rangorde: *pagina 36; de 1e; een monument uit de 16e eeuw;*
- een aanduiding van een verhouding:
  procent: *zoutgehalte van 10%;*
  breuk: *4/5 van de klas is aanwezig;*
  verhouding: *de delen verhouden zich als 2 tot 5;*
  kans: *je hebt een kans van één op drie om te winnen;*
  maatgetal: *8 uur; 50 kg; 10 m; 2 ha; 20 cl;*
- een operator in een bewerking: *neem 6 keer 5; 4 + 9;*
- een code: *een formule-1 wedstrijd; postnummer 2640.*

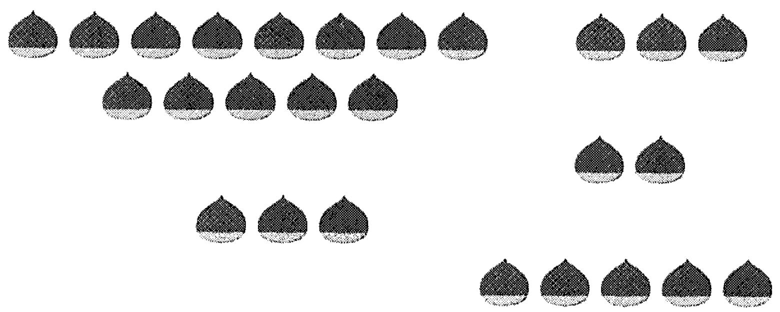
De verschillende functies die een getal kan hebben, zijn niet nauwkeurig af te bakenen. Ze zijn situatiegebonden. Neem als voorbeeld je huisnummer: voor jezelf kan dit getal een zuivere code zijn. Maar voor iemand die je huis zoekt in de straat zal dat getal meer een rangorde aanduiden.

G10

Kinderen verwerven inzicht in de tientalligheid van ons talstelsel door hoeveelheden te groeperen per tien. Geef opdrachten waarbij de hoeveelheid gegeven is en de leerlingen de passende groepering per tien moeten tekenen en/of noteren. Omgekeerd: geef een getal, de leerlingen tekenen of leggen de passende hoeveelheid. Groepeeroefeningen per 2, 3, 4 enz. dragen weinig bij tot het inzicht in het tientalligheid van ons talstelsel. Enkele van zo'n oefeningen kunnen wel gegeven worden als inleiding op het groeperen.

Kinderen komen in contact met het plaatswaardesysteem van ons talstelsel wanneer ze hoeveelheden groter dan negen moeten noteren. Positiemateriaal als MAB- materiaal, een abacus ... ondersteunen de verdere verkorting van de groeperingen per tien

- *Maak groepjes van tien.*



- *Op dit cijferkaartje staat 27. Leg die hoeveelheid eens met kastanjes. Je weet dat er maar tien op één bord mogen liggen.*

G11

We zeggen 'honderd', 'vijf', (en) 'twintig', maar we schrijven '1', '2', '5'.

De volgorde waarin je de cijfers van de getallen verwoordt, is verschillend van de volgorde waarin je de cijfers van de getallen noteert. Dat probleem stelt zich bijvoorbeeld niet in de Franse taal.
Bij het noteren respecteren we de volgorde van de cijfers niet waarin we ze uitspreken, omdat we in ons schrift altijd van links naar rechts schrijven.

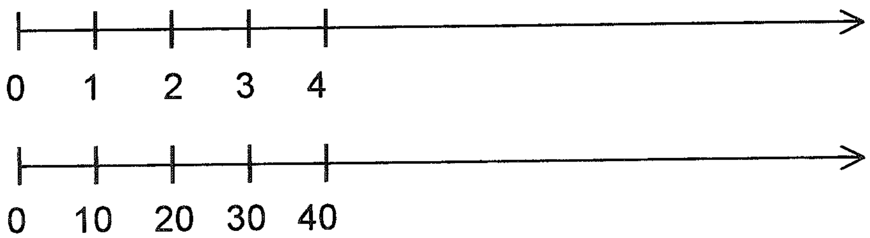
De term 'natuurlijk getal' moet door leerlingen in het vierde leerjaar verworven zijn. Een natuurlijk getal is een getal dat je 'natuurlijkerwijze' gebruikt bij het tellen, het is een 'naam' die je aan een telbare hoeveelheid kunt geven. De precieze wiskundige omschrijving is geen leerstof voor de lagere school.

De leerlingen moeten de getallen tot 1 000 000 000 kunnen lezen en schrijven. Per groep van 3 cijfers laat je een spatie om de leesbaarheid te bevorderen. In een getal noteer je geen punten.

In de hogere leerjaren werken leerlingen soms met artikels uit kranten en tijdschriften of met gegevens van internet. Let erop dat bij berichtgeving uit de USA 'billion' in het Nederlands 'een miljard' betekent. Een 'biljoen' is duizend miljard of een miljoen maal een miljoen.

G12

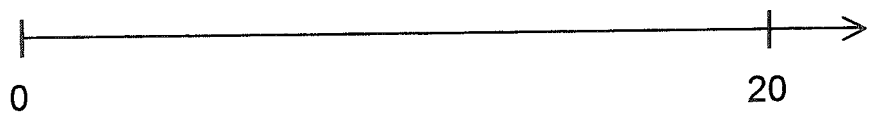
Al vroeg in het kleuteronderwijs leren kinderen hoeveelheden vergelijken en ordenen (zie G1). Wanneer kinderen getallen goed kunnen ordenen, dan hebben ze al een belangrijke stap gezet om getallen te leren plaatsen op de getallenas. De getallenas bouw je op volgens een gekozen ijk. Besteed daaraan voldoende aandacht.



- *Teken op dit blad papier een getallenas waarop je de getallen 0, 500 000 en 1 000 000 kunt schrijven*

Oefeningen waarbij kinderen getallen moeten situeren op een getallenas waar geen of slechts enkele onderverdelingen gegeven zijn, leren hen getallen schatten en afronden. (G35 - G36)

- *Hoe oud ben jij? Waar staat dat getal ongeveer op deze getallenas? Hoe kan je dat goed aanpakken?*



In de oefening hierboven moeten kinderen getallen schattend plaatsen op de getallenas. Geef kinderen niet enkel opdrachten waarbij ze getallen precies moeten situeren op een getallenas.

G13

Inzicht in de structuur van de getallen is fundamenteel voor het wiskundig denken. Het is niet voldoende dat kinderen inzicht verwerven in de tientalligheid en het plaatswaardesysteem van ons talstelsel (G10).

Een goed inzicht in de structuur van de getallen zal kinderen toelaten flexibel te rekenen (zie B11, B14, B18 en B22).

(Her)structureringen omvatten meer dan splitsingen alleen.

Zo kun je bijvoorbeeld het getal 80 structureren als:
- *80 is 50 en 30,*
- *80 is 4 keer 20,*
- *80 is 2 keer 30 en 20*
- *80 is 20 minder dan 100*
- *80 is 1/10 van 800*
- *80 is de helft van 160*
- *80 is het dubbele van 40*

Niet alle (her)structureringen van 80 zijn splitsingen.

De term 'splitsen' hoeven de kinderen niet te kennen. Hij kan wel worden gebruikt in de klas. Ook de term '(her)structureren' dienen kinderen niet te kennen.

1.2.5 BREUKEN

Inleiding

Werken met breuken ervaren veel leerlingen als moeilijk en minder aangenaam. Dat heeft veel te maken met het feit dat de begripsvorming te weinig aan bod komt en dat je te vlug formeel gaat rekenen met breuken.

Vertrek ook bij breuken vanuit betekenisvolle situaties en geef de leerlingen voldoende kans te handelen en ook te verwoorden.
Wat de leerlingen op concreet niveau vaststellen, moeten ze al dan niet onder begeleiding van de leerkracht vertalen in een schematische voorstelling (tekening, structuur, ...).

Hoe je breuken leest en noteert, vind je op blz. 38.

Ontwikkeling van het breukbegrip

In de rubrieken zijn een aantal activiteiten onderscheiden die eigenlijk moeilijk te scheiden zijn. In de lespraktijk zullen de verschillende activiteiten elkaar doorkruisen. Het is belangrijk dat alle activiteiten aan bod komen. Wie zich beperkt tot één soort activiteit, ontwikkelt slechts één breukaspect en belemmert de ontwikkeling van een zo volledig mogelijk breukbegrip.

1 EEN BREUK ALS RESULTAAT VAN EEN HANDELING

1.1 'Eerlijk verdelen' in de betekenis van 'in gelijke delen verdelen'

1.1.1 Verdeelsituaties

G14a) en G14d)
B1

Eenvoudige verdeelsituaties bereiden het 'eerlijk delen' voor.

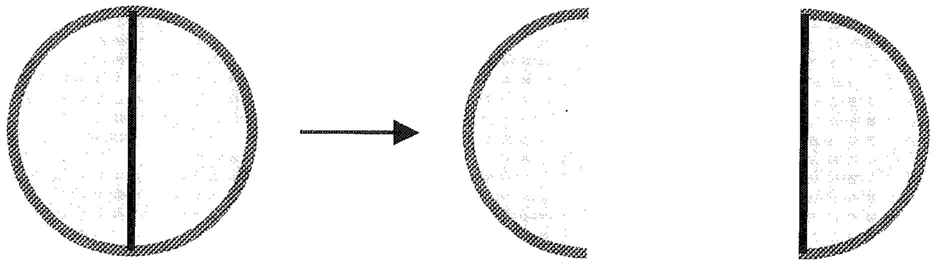
- *Een leerkracht heeft enkele repen chocolade voor enkele leerlingen. Hoeveel chocolade zal ieder kind krijgen als de leerkracht de repen eerlijk verdeelt?*
  Antwoord: Hoeveel chocolade ieder kind krijgt, hangt af van het aantal repen dat de leerkracht heeft en het aantal leerlingen dat er is.
- *Hoeveel repen heeft de leerkracht als elke leerling precies één reep krijgt?*
  Antwoord: Precies evenveel repen als er leerlingen zijn.
- *Hoeveel repen heeft de leerkracht als elke leerling meer (minder) krijgt dan één reep?*
  Antwoord: Dan heeft de leerkracht meer (minder) repen dan er leerlingen zijn.
- *Hoeveel repen heeft de leerkracht als elke leerling precies een halve reep krijgt?*
  Antwoord: Dan heeft de leerkracht half zoveel repen als er leerlingen zijn. Het aantal repen is de helft van het aantal leerlingen Het aantal leerlingen is het dubbele van het aantal repen.

1.1.2 Eén geheel (object) eerlijk verdelen

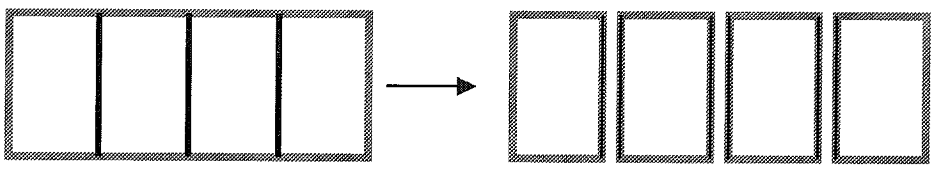
G14a) en G14d)
B15 en B20

In deze activiteiten geraken de leerlingen vertrouwd met de verwoording "één van de ... gelijke delen van ...". Verwijs bij de verwoording uitdrukkelijk naar het geheel.

- *Verdeel één taart eerlijk onder twee kinderen. Ieder kind krijgt een halve taart. Wat heb je gedaan? Ik heb de taart in twee gelijke delen verdeeld en ieder kind krijgt één van de twee gelijke delen van die taart.*



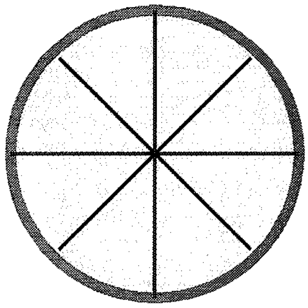
- *Doe hetzelfde voor het gelijk verdelen onder vier kinderen (een kwart taart, één van de vier gelijke delen), onder drie kinderen (één van de drie gelijke delen, één derde van een taart), enz.*

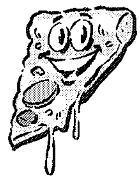


Gebruik op concreet niveau taarten, cakes, repen en tabletten chocolade, flessen met water, enz. In de praktijk hanteer je naast de objecten uit het dagelijkse leven, materiaal dat deze objecten voorstelt zoals schijven (al dan niet magnetisch), breukenborden en breukenstaafjes.
Je kan ook zelf materiaal ontwikkelen: kartonnen schijven, bladen papier, smalle stroken papier, enz. De leerlingen kunnen deze materialen gemakkelijk vouwen, knippen of scheuren. Het is nodig dat de leerlingen in deze eerste fase het materiaal herhaaldelijk gebruiken om de verdelingen eigenhandig uit te voeren en te verwoorden. Beperk dit handelen op concreet niveau niet tot het tweede leerjaar.

In een tweede fase geef je de handelingen schematisch weer: Teken de gelijke verdelingen op een schijf of op een rechthoek. Omdat de oppervlakte van een figuur in gelijke delen verdeeld wordt, spreekt men van een oppervlaktemodel. (Het is echter niet de bedoeling dat de leerlingen de term oppervlaktemodel gebruiken.)

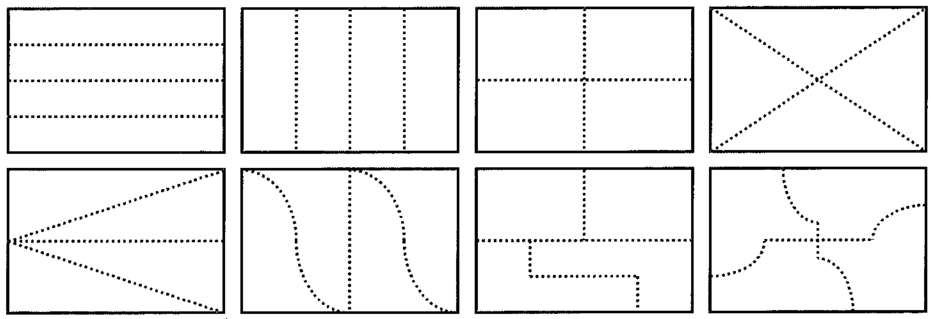
Een taart, pannenkoek of pizza eerlijk onder acht verdelen. Ieder krijgt één van de acht gelijke delen.





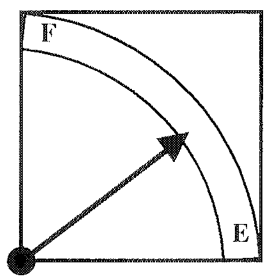
MR39, MK39 en MK41

Indien je een rechthoekige cake (koek, tablet chocolade, ...) eerlijk onder vieren verdeelt, zijn er meerdere manieren om die verdeling uit te voeren.



Let bij de verwoording erop dat de leerlingen altijd de term 'gelijke delen' gebruiken. De leerlingen moeten ervaren dat alle delen dezelfde oppervlakte hebben. Omdat de delen gelijk zijn, betekent dat niet dat die delen ook gelijkvormig zijn. De verdeling van de vierde, de zevende en de achtste rechthoek in gelijke delen kan je niet nagaan door de delen uit te knippen en op elkaar te leggen. Dit soort verdelingen komt niet aan bod bij de aanbreng van breuken.

In alle lessen is het belangrijk de leerlingen te laten verwoorden wat het geheel of de eenheid is. Het geheel zal bovendien veelvuldig variëren en dit zowel in grootte als in vorm. Naast rechthoekige, vierkante en ronde vormen, kan je ook gebruik maken van driehoekige of zeshoekige vormen. Interessant zijn ook voorstellingen waarbij het geheel voorgesteld is door een halve cirkel of een kwart cirkel, bijvoorbeeld de benzinemeter.

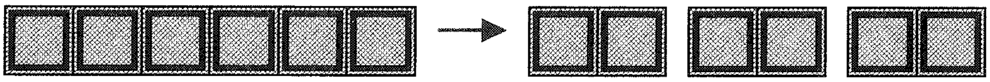


Als het geheel bijvoorbeeld een volledige cirkel is en je toont een kwart van die cirkel, dan herkennen leerlingen gemakkelijk de kwartcirkel als één vierde van het geheel. Zelfs zonder dat de volledige cirkel als geheel

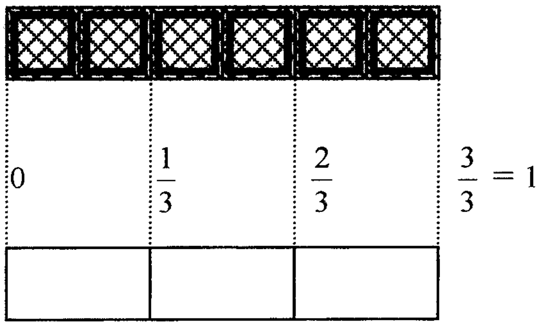
G15 zichtbaar is. Bij een rechthoekige vorm daarentegen kun je een kwart niet herkennen zonder de volledige vorm te zien.
Anderzijds kunnen rechthoekige vormen meestal gemakkelijker in gelijke delen verdeeld worden dan ronde vormen.

Een reep chocolade of een cake kan je schematisch voorstellen door een smalle rechthoek. Bij dit zogenaamde strookmodel breng je de verdelingslijnen meestal verticaal aan. De smalle strook stelt één geheel voor. Nadat het geheel in gelijke delen verdeeld is, nemen de leerlingen een aantal delen en benoemen ze wat ze genomen hebben.

Een reep chocolade die zes stukjes bevat, eerlijk verdelen onder drie leerlingen. Ieder krijgt één van de drie gelijke delen.



Dit strookmodel kan je gebruiken om breuken op de getallenas te plaatsen. De volledige strook komt overeen met het getal 1 en na verdeling in gelijke delen kunnen de leerlingen de overeenkomstige breuken een plaats geven.



De leerlingen moeten eenvoudige verdeelopdrachten vlot kunnen uitvoeren, schematiseren en verwoorden, vooraleer ze breuken leren noteren vanaf het 3e leerjaar.

1.1.3 Meer gehelen (objecten) eerlijk verdelen

G14a
DO1, DO5, DO8,
DO9, DO10

De breuk 3/4 kun je letterlijk lezen als: 'drie gedeeld door vier'. Dat sluit goed aan bij de betekenis van de notatie zelf: "Verdeel drie gehelen (objecten) in vier gelijke stukken."

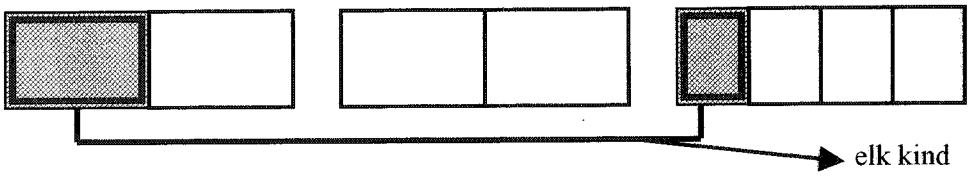
Bekijk volgende probleemstelling.

Verdeel drie repen chocolade eerlijk onder vier leerlingen.

Vraag vooraleer het probleem in detail te bespreken dat de leerlingen eerst schatten.

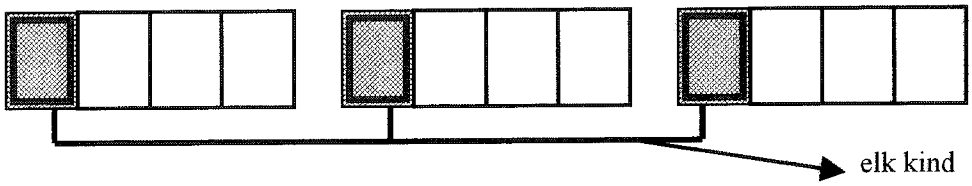
Krijgt elk kind meer of minder dan één reep?
Krijgt elk kind meer of minder dan een halve reep?

1e mogelijkheid
Een leerling geeft elk kind een halve reep. De overblijvende reep verdeelt ze in vier gelijke delen. Het verdelen van de overblijvende reep kan op verschillende manieren gebeuren, zoals hierboven werd uitgelegd.



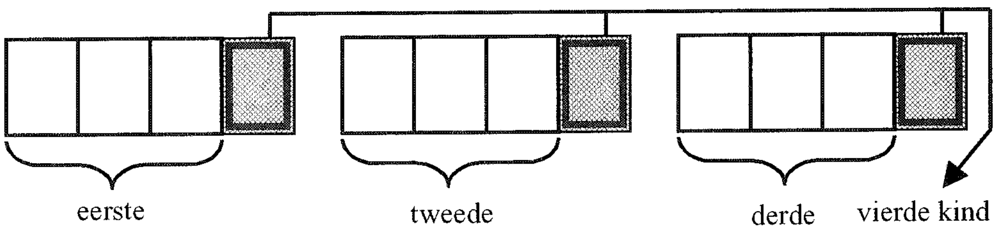
Ieder kind krijgt eerst een halve reep en nadien nog een kwart reep.

2e mogelijkheid
Leerlingen kunnen ook als volgt werken.



Ieder krijgt een kwart van een reep. Drie keer een kwart is driekwart van een reep.

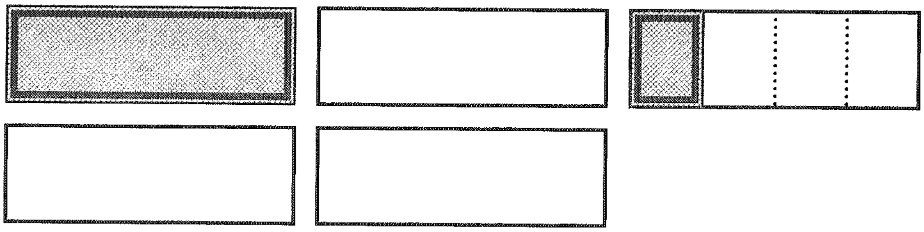
3e mogelijkheid
Drie leerlingen krijgen elk één reep en geven een kwart van die reep weg. Het vierde kind krijgt drie keer een kwart van een reep



'Eerlijk delen' ligt aan de basis van activiteiten als deze. Dat geeft kansen om breuken op een natuurlijke wijze te introduceren bij leerlingen. Bedenk ook dat heel wat breukentaal op een natuurlijke wijze wordt ontwikkeld: halve reep, kwart reep, één vierde van elk.

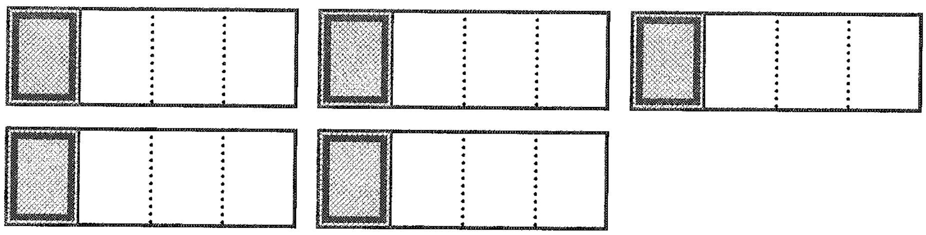
Op een analoge manier kunnen breuken aan bod komen waarvan de teller groter of gelijk is aan de noemer (de onechte breuken).

Verdeel vijf repen chocolade eerlijk onder vier leerlingen.



Elk krijgt 1 reep en 1/4 van een reep, of 1 geheel en 1/4

Of:



Elk krijgt van elke reep, of 5 keer 1/4

Zo'n situaties waarbij leerlingen verdelingen daadwerkelijk moeten uitvoeren, leiden tot een groter inzicht in breuken. De breuknotatie van situaties waarbij meer gehelen (objecten) eerlijk verdeeld worden, is moeilijk.

Verdeel 3 repen chocolade eerlijk onder vier leerlingen
Elke leerling krijgt bij deze verdeling 1/4 van elke reep, dus 3 keer 1/4 reep of in totaal 3/4 van 1 reep.
Leerlingen noteren bij deze verdeling: '3/4 van 1 reep' en niet '3/4'.
3/4 verwijst naar de totale hoeveelheid en dit leidt tot volgende rekenfout: 3/4 van 3 repen = 9/4.

1.1.4 Aanvullingen

Zowel het oppervlaktemodel als het strookmodel laten een aantal wezenlijke kenmerken van het breukbegrip zien:

- het geheel wordt verdeeld in 'gelijke' delen;
- de noemer geeft het totaal aantal gelijke delen aan;
- als alle delen worden samengevoegd, ontstaat terug het geheel;
- de teller geeft het aantal delen aan dat je van het geheel neemt.

Niet-wezenlijke kenmerken zoals de aard van het materiaal, de grootte, de hoeveelheid, het model of de vorm, ... zullen tijdens de activiteiten zoveel mogelijk variëren.

1.2 *Eén object in gelijke delen verdelen en een aantal delen nemen*

Bij dit soort activiteiten verdelen de leerlingen één geheel in gelijke delen (schematisch voorgesteld door een schijf, een rechthoek, een strook ...). Van de gelijke delen duiden ze eerst één en nadien meer delen aan.

Deze benadering waarbij één geheel in gelijke delen wordt verdeeld, noemt men ook de deel-geheel benadering. Zo lees je 3/4 niet als een opdracht om 'drie gehelen te verdelen onder vier', maar als de opdracht om '1 geheel te verdelen in vier gelijke delen en daarvan drie gelijke delen te nemen.'

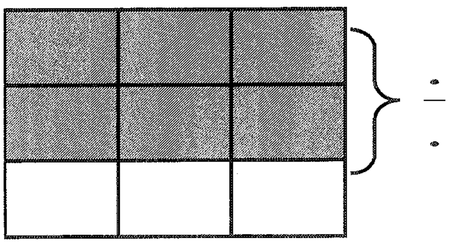
Kies als uitgangspunt een probleemstelling.

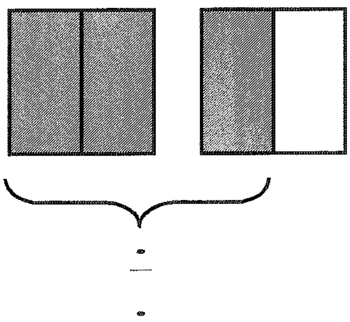
"Jan heeft zijn Leo-koek in vier gelijke stukjes verdeeld. Hij geeft Miet en An elk één stukje en zelf eet hij de rest op.
Welk deel van de koek krijgen Miet en An elk?
Welk deel van de koek eet Jan op?"
De leerlingen voeren de verdeelhandelingen uit (bijv. met een 'papieren' koek) en verwoorden nauwkeurig wat ze doen.
Wat is het geheel? De volledige Leo- koek.
Welk deel van de Leo- koek krijgen Miet en An?
Miet en An krijgen elk één van de vier gelijke delen van de koek.
Welk deel van de Leo-koek eet Jan op?
Jan eet twee van de vier gelijke delen van de koek op.
Miet en An krijgen dus elk één vierde van de koek.
Jan eet twee vierde van de koek op.

Reik leerlingen dergelijke oefeningen veelvuldig aan. Pas wanneer ze die redelijk vlot al handelend kunnen uitvoeren en verwoorden, is het aangewezen de breuken te leren noteren.

Op schematisch niveau gebruik je het oppervlakte- of het strookmodel. Volgende oefening geeft kansen voor een rijke bespreking. Daarbij is belangrijk dat leerlingen goed weten wat een geheel is.

Welk deel is gearceerd? Vul een passende breuk in.





Links vinden de leerlingen 6/9 rechthoek of ook 2/3 rechthoek.
Rechts vinden de leerlingen 3/2 van één rechthoek, maar ook 3/4 van twee rechthoeken. Eens te meer geeft dit voorbeeld aan hoe belangrijk het is om telkens te verwijzen naar het geheel.

Meten

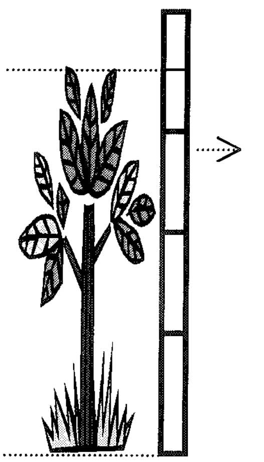
Breuken ontstaan niet alleen bij verdeelsituaties. Ook bij het meten van lengten met bijvoorbeeld de hulp van stroken kunnen breuken spontaan aan bod komen.

Mier Fifi vertrekt op weg naar huis.
Waar is mier Fifi als ze halverwege is?
... juist over de helft
... ongeveer een kwart van de weg
... bijna op driekwart van de weg
... juist op een derde van de weg

Een strook stelt de afstand tussen het beginpunt en het eindpunt voor. Die strook is het geheel. De leerlingen maken stroken van 1/2, 1/3, 1/4 en 1/5 van de lengte van het geheel. Het referentiegeheel blijft duidelijk zichtbaar aanwezig. Daarmee kunnen ze al heel wat meetoefeningen doen waarbij naast echte breuken ook 'onechte' breuken op een heel gewone wijze voorkomen.

MR11, MR12, MR14

- *Meet de lengte van je tafel*
  "Meer dan 2 stroken en minder dan 3 stroken, ongeveer twee stroken en één 1/2 strook" zegt Mia.
  Terwijl Jan op vijf keer 1/2 strook uitkomt, of 5/2 strook.



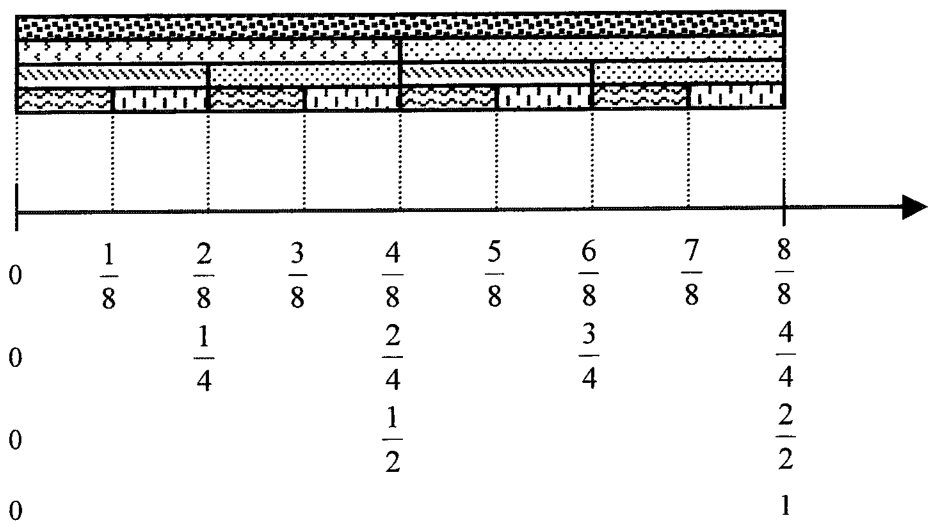
3 stroken en een halve strook

- *Meet je eigen lengte met stroken.*

- *Indra meet 6 stroken en twee keer 1/4 strook. Joni meet 6 stroken en twee keer 1/3 strook. Wie is de grootste?*

De leerlingen meten voorwerpen met halve en kwart stroken omdat de begrippen half en kwart gekend zijn vanuit de omgangstaal. Daarna meten ze de lengte van voorwerpen waarbij ze 1/3 of 3/4 van een strook nodig hebben.
Ten slotte meten ze voorwerpen waarbij ze vijfden of tienden of andere verdelingen van een strook nodig hebben. Aanvankelijk brengt de leerkracht zelf een passende verdeling op de stroken aan.

Die meetactiviteiten bieden kansen het breukbegrip en de breukentaal te ontwikkelen. Ze zijn ook een goede voorbereiding om breuken op een getallenas te leren plaatsen.



1.3 Een verhouding bepalen en noteren als een breuk

Met verhoudingen word je veel geconfronteerd in dagelijkse situaties.

- *Ongeveer één op vier leerlingen komt met de fiets.*
- *In het vijfde leerjaar zijn twee op drie leerlingen meisjes.*
- *Een hevige brand vernielde vijf van de zes rijwoningen.*

Deze verhoudingen kan je noteren in breukvorm.

- *1/4 van de leerlingen,*
- *2/3 van de leerlingen,*
- *5/6 van het aantal woningen.*

1.3.1 Verhoudingen zien en ze vertalen in een breuk

G38, G39 en G41

Bekijk het volgende voorbeeld.

Maak een kralenketting.
Gebruik voor elke blauwe parel twee witte parels. Het aantal blauwe en witte parels en het totaal aantal parels dat je gebruikt, kun je noteren in een tabel.

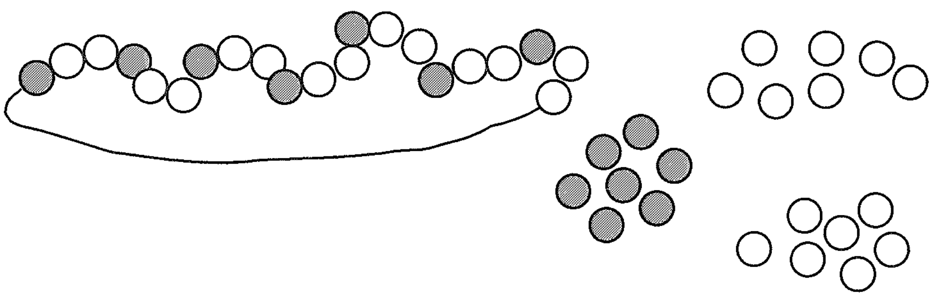
Aantal blauwe parels	*1*	*2*	*3*	*4*	*5*	*6*	*7*
Aantal witte parels	*2*	*4*	*6*	*8*	*10*	*12*	*14*
Totaal aantal parels	*3*	*6*	*9*	*12*	*15*	*18*	*21*

Je hebt in totaal 21 parels gebruikt.
Die 21 parels vormen het geheel (de kralenketting).
Die 21 parels bestaan uit 7 blauwe parels en 14 witte parels.
Welk deel van de ketting bestaat uit blauwe parels?

Laat de leerlingen de ketting uit elkaar halen. Laat ze ontdekken dat de ketting van 21 parels uit drie groepjes van elk 7 parels bestaat.

Eén groepje van 7 blauwe parels en twee groepjes van elk 7 witte parels. Eén van de drie gelijke groepjes bestaat dus uit blauwe parels, of 1/3 van de kralenketting uit blauwe parels.

Welk deel van de ketting bestaat uit witte parels?
Analoog vinden de leerlingen dat 2/3 van de kralenketting bestaat uit witte parels.



Andere voorbeelden vind je in recepten om limonade te bereiden (1 deel siroop op 3 delen water) of bij recepten van gerechten waarbij ingrediënten in een bepaalde verhouding moeten worden gemengd. Die situaties zijn echter van een andere orde omdat je de samenstellende delen na 'menging'" niet opnieuw uit elkaar kunt halen.

1.3.2 Een breuk interpreteren als een verhouding

G14c

Bekijk het volgende voorbeeld.

In onze klas zitten 25 leerlingen, 15 leerlingen zijn jongens. Welk deel van het aantal leerlingen zijn jongens? Noteer het antwoord in breukvorm.

Het geheel wordt gevormd door de 25 leerlingen van de klas. 15 van deze 25 leerlingen zijn jongens, dus 15/25 zijn jongens.
Daarna vereenvoudigen de leerlingen de breuk. Het is duidelijk dat de leerlingen dergelijke oefeningen slechts kunnen oplossen wanneer ze breuken kunnen vereenvoudigen.

Hetzelfde probleem wordt iets moeilijker wanneer gegeven is dat er 10 meisjes en 15 jongens zijn in de klas. Nu moeten de leerlingen zelf het geheel bepalen.

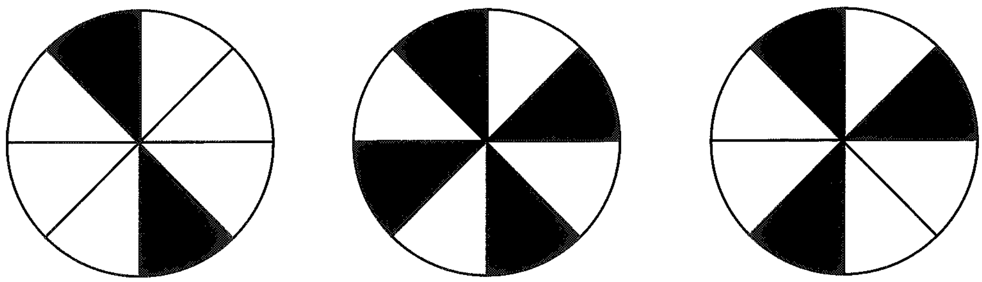
Frank slaapt gemiddeld 8 uur per dag.
Welk deel van de dag slaapt Frank?

1.3.3 Een breuk interpreteren als een kans

G14c

De breuk als een aanduiding voor een kans een deelaspect van 'de breuk als een verhouding'. Kansspelen kunnen hier een mooi instapprobleem vormen.

- *Je wint een prijs als je op een zwart gedeelte van het rad komt.*
  Bij welk rad heb je de meeste kans?



- *Je werpt een muntstuk op.*
  Wat is de kans op kruis? (1/2)

- *Je werpt met een dobbelsteen.*
  Wat is de kans dat je een 3 gooit? (1/6)
  Wat is de kans dat je meer dan 3 gooit? (3/6 of 1/2)

Dat de kans hier met een verhouding wordt verwoord, is eigenlijk voor de hand liggend. Bij het eerste rad is de verwoording "twee van de acht hokjes, twee van de acht, ..." vanzelfsprekend. De stap naar de breuk 2/8 is dan vlug gezet.

Sterkere leerlingen kunnen het begrip kans verder uitdiepen. Die leerlingen kun je confronteren met moeilijker situaties waar het begrip 'kans' niet zo voor de hand ligt.

- *Gooien met twee dobbelstenen.*
  Wat zijn de mogelijke uitslagen?
  (36 combinaties - met dubbels)
  Hoeveel kans heb je om de som zeven te gooien?
  (6, namelijk 1-6, 2-5, 3-4, 6-1, 5-2, 4-3)
  Heb je meer kans om negen te gooien?
  (slechts 4 kansen: 3-6, 4-5, 5-4, 6-3)

- *Een draairad is verdeeld in 12 delen. 6 delen zijn rood, 3 groen, 2 blauw en 1 is wit gekleurd. Leg uit waarom je het meeste punten verdient als de pijl op het witte deel blijft staan. Zoek een zo eerlijk mogelijke puntenverdeling.*
  (Antwoord: Je hebt slechts 1 kans op 12 om wit te treffen. Een mogelijke puntenverdeling kan zijn: wit 12 of 6, blauw 6 of 3, groen 4 of 2 en rood 2 of 1.)

2 Een breuk als uitgangspunt van een situatie of handeling

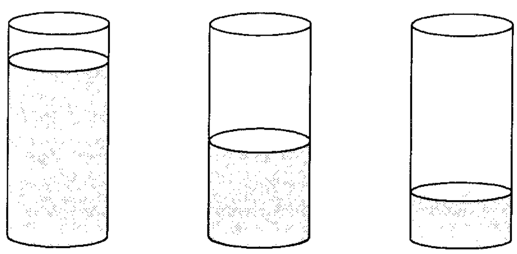
2.1 Een breuk als operator toegepast op een continue grootheid

2.1.1 Ervaren dat een breuk verbonden is met het geheel waarvan wordt uitgegaan

14a

Het is belangrijk dat je de leerlingen confronteert met oefeningen waar het geheel varieert. Zo ervaren ze dat een breuk van een geheel niet los te zien is van dat geheel.

- *Op een tafel staan drie gelijke balk- of cilindervormige recipiënten (bijv. flessen of bokalen). Giet water in het eerste recipiënt (niet helemaal vol).*
  "Giet water in de tweede bokaal tot er precies half zoveel water in zit als in de eerste bokaal. Giet water in de derde bokaal tot er precies half zoveel water in zit als in de tweede bokaal."

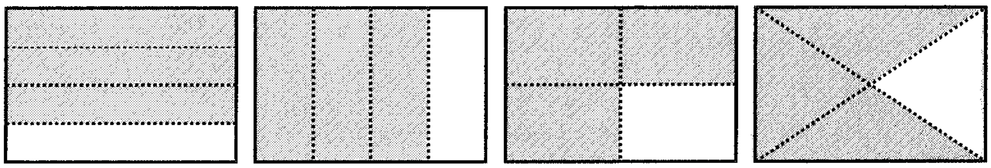


- *Wat kies je '1/3 van de inhoud van de snoepdoos die vader achter zijn rug houdt' of '1/4 van de inhoud van de snoepdoos die moeder achter de rug houdt'? Ben je zeker dat je de meeste snoep hebt als je kiest voor 1/3?*

Met deze opdracht ervaren leerlingen dat elke breuk verbonden is met het geheel van waaruit je vertrekt.

Laat leerlingen ook op schematisch niveau ervaren dat een breuk verbonden is met het geheel waarvan ze uitgaan. Ze verdelen het geheel op verschillende manieren. Bij deze oefeningen ligt het gebruik van het oppervlaktemodel voor de hand.

Arceer 3/4 van een gegeven rechthoek.



Opgaven waarbij het resultaat meer is dan het geheel ga je zeker niet uit de weg. Nogal wat leerlingen denken namelijk dat een breuk van een hoeveelheid altijd kleiner is dan die hoeveelheid.

Teken 6/5 van het geheel.

De leerlingen moeten nu een deel bijtekenen om de aangeduide breuk te kunnen tekenen.

Het strookmodel is handig bij het schematiseren van deze oefening.

Voor de meeste leerlingen zijn oefeningen waarbij de breuk gegeven is en ze het geheel moeten zoeken moeilijker. Ze maken dan immers een omgekeerde beweging, namelijk van 'deel' naar 'geheel'.

2.1.2 Meetoefeningen

MR52

Neem een aantal identieke balk- of cilindervormige recipiënten. Vul ze respectievelijk met 1/1 (het geheel), 1/2, 1/3, 1/4, 1/5, 1/8 en 1/10 water.

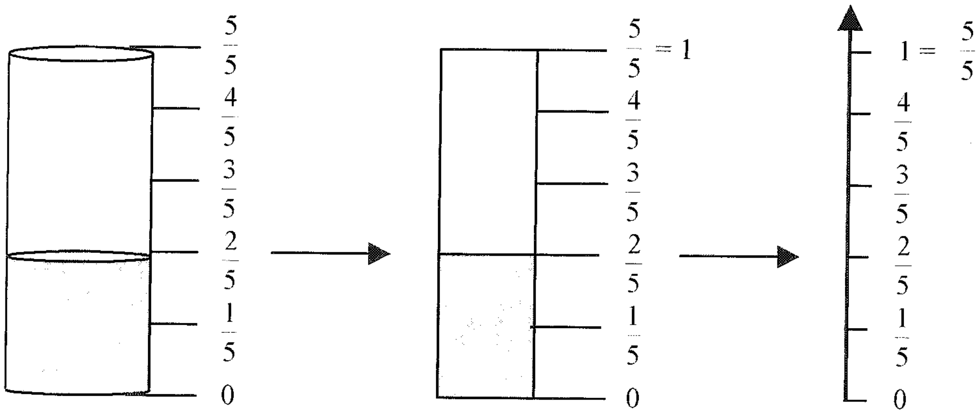
Markeer de waterhoogte telkens met plakband.

Welke bokaal is voor 1/5 gevuld?

De leerlingen maken de proef op de som. Ze gieten vijf keer één vijfde in een gelijkaardig recipiënt. Ze controleren of ze dezelfde hoeveelheid als het geheel bekomen.

Werk op analoge manier met andere breuken. De leerlingen ervaren dan dat een geheel bestaat uit vijf keer één vijfde, maar ook drie keer één derde, vier keer één vierde, enz.

Gebruik op schematisch niveau het strookmodel.



Uiteindelijk is het de bedoeling over te gaan op de getallenas.

Lengten meten met breukstroken laat toe om een aantal inzichten in breuken te verdiepen:

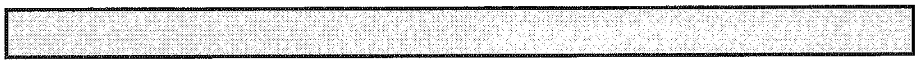
- vergelijken: *een kwart strook is korter dan een halve strook;*
- verhoudingen bepalen: *twee kwart stroken zijn even lang als een halve strook;*
- verdelen van een geheel: *een hele strook kan je verdelen in vier kwart stroken ...*

De leerlingen beschikken over gelijke stroken.

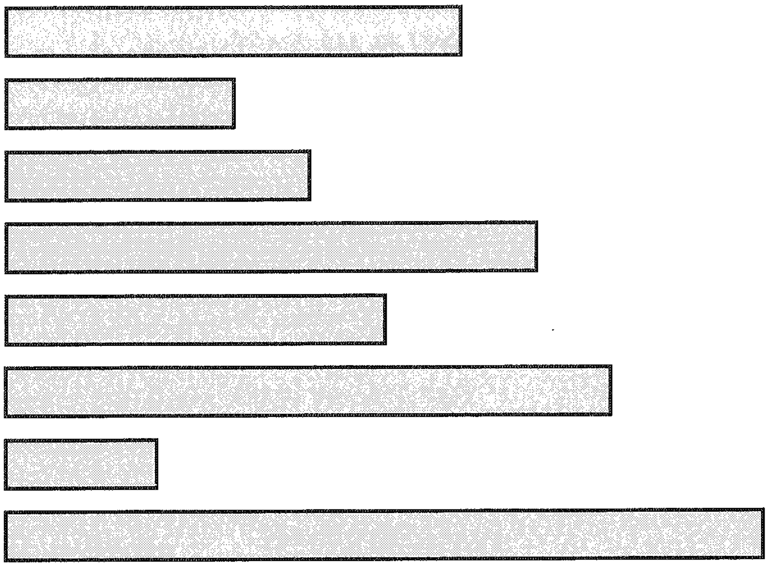
De leerlingen zoeken voorwerpen die een halve strook lang zijn, die een kwart strook lang zijn, ...

Ze zullen spontaan de strook in twee of vier gelijke delen verdelen. Voor halven en kwarten vormt dit geen probleem. Maar hoe pakken ze het aan als ze voorwerpen moeten zoeken die 1/3, 1/5, 1/6, ... van een strook lang zijn?

Dit is een volle strook:



Zoek de kwartsstrook om te meten:



Verdeel in dit stadium zelf de stroken in een aantal gelijke delen of bied stroken aan met een ruitjespatroon.

De leerlingen nemen de juiste strook uit een reeks stroken die je hebt klaargemaakt. Ze moeten de betekenis van de noemer correct vatten.

Bied analoge oefeningen aan waarbij de leerlingen voorwerpen zoeken die 2/3, 5/4, 6/7, ... strook lang zijn.

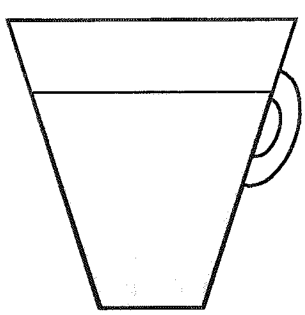
Let bij deze oefeningen op de lengte van de strook. Zo kan je een strook van 20 cm moeilijk in 7 gelijke delen verdelen.

Bij dit soort oefeningen ervaren de leerlingen het onderscheid tussen teller en noemer.

Opmerking

Het begrip 'gelijke delen' moet je met de nodige omzichtigheid gebruiken.

Laat de hoogte van het water in de kan met één vierde zakken



Merk op dat 'het gelijk zijn van de delen' niet op alle kenmerken van die delen toepasselijk is. Als je bijvoorbeeld de inhoud van de kan hierboven verdeelt in gelijke delen dan komen die gelijke delen niet overeen met gelijke delen in de hoogte. Leerlingen moeten dit kunnen ervaren maar niet exact kunnen aanduiden op de tekening.

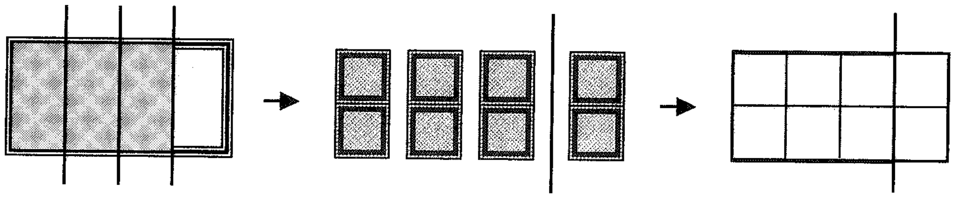
2.2 *Een breuk als operator toegepast op een aantal*

Schets een probleemsituatie.

Neem 3/4 van een tablet chocolade die bestaat uit 8 stukjes.

Laat de wikkel rond de chocolade zodat de leerlingen het aantal stukjes niet zien. De leerlingen verwoorden de nodige handelingen. Doe daarna de wikkel weg en herhaal de noodzakelijke handelingen.

In de praktijk kunnen we gebruik maken van een kartonnen tablet chocolade die bedekt wordt met 8 stukjes karton van gelijke grootte.



Neem 3/4 van deze tablet.

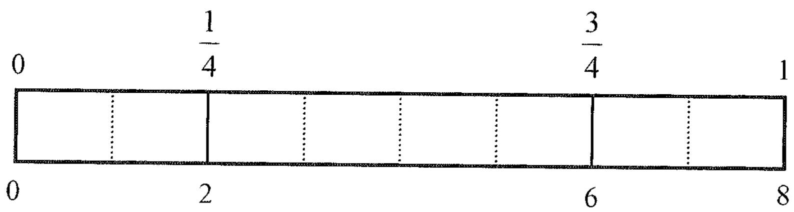
Wat is het geheel? Hoeveel stukjes bevat het geheel?

De leerlingen verdelen de tablet in vier gelijke delen en nemen er drie gelijke delen van.

3/4 van 8 = 3 keer 1/4 van 8 = 6

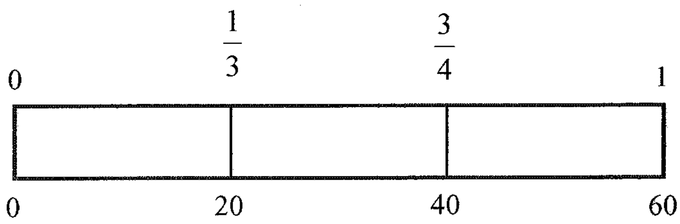
Leerlingen die moeilijkheden hebben met deze oefening, nemen eerst 1/4 van de tablet. De leerlingen verwoorden daarna de betekenis van 3/4 tablet, namelijk 3 keer één vierde tablet.

Stap geleidelijk over op een strook waarop niet de afzonderlijke stukjes, maar enkel het aantal stukjes is aangegeven.



In plaats van chocolade kan je ook andere objecten gebruiken die onderverdeeld zijn in een aantal delen bijvoorbeeld ijsblokjes, eierdozen, kratten met flessen, brikpakken in plastic verpakking, kartonnen verpakking van appels... Blijf de strook gebruiken om het probleem op schematisch niveau voor te stellen.

Een fles limonade kost 60 fr. Vandaag heb ik 2/3 van die fles uitgedronken. Hoeveel kost het deel dat ik gedronken heb?



De leerlingen weten nu dat een breuk nemen van een grootheid betekent: "De grootheid delen door de noemer en vermenigvuldigen met de teller". Dan gebruiken de leerlingen de breuk als een vermenigvuldingsfactor.

Onze school telt 250 leerlingen. 2/5 komt met de fiets naar school, dit zijn in het totaal ... leerlingen.
2/5 van 250 leerlingen = 2 keer 1/5 van 250 leerlingen
= 2 x 1/5 x 250 leerlingen
= 2 x 50 leerlingen
= 100 leerlingen

3 Een breuk als rationaal getal

Tot en met het derde leerjaar gebruiken de leerlingen de breuken enerzijds om een situatie of handeling te beschrijven en anderzijds als operator toegepast op een samenhangend geheel (een continue grootheid) of op een aantal. Op het einde van het derde leerjaar kunnen ze behoorlijk werken met benoemde breuken zoals 1/2 reep, 1/3 taart, enz. Vestig hierbij de aandacht op het geheel waarvan ze uitgaan.
Let erop dat de leerlingen bijvoorbeeld verwoorden "Ik heb 1/8 van deze figuur gekleurd.", en niet "Ik heb 1/8 gekleurd."

Vanaf het vierde leerjaar krijgt de breuk als rationaal getal betekenis. Een breuk krijgt dan een plaats samen met de natuurlijke getallen op de getallenas. Het geheel waarnaar de breuken verwijzen is dan een abstracte eenheid, namelijk de afstand tussen 0 en 1 op de getallenas.

DO2, DO5 en DO6

Geef eerst oefeningen waarbij leerlingen breuken op een getallenas moeten situeren waarvan de eenheid gevormd wordt door de afstand van 0 naar 1. Daarna kun je oefeningen geven waarbij de leerlingen de omgekeerde weg volgen. Geef bijvoorbeeld twee breuken en laat de leerlingen een passende getallenas zoeken.

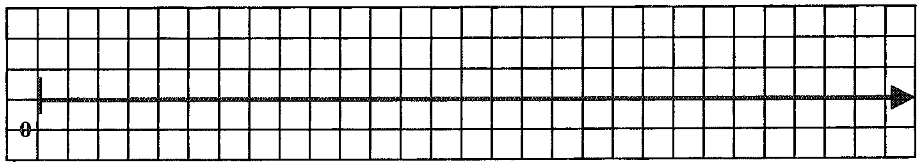
Teken een rechte op ruitjespapier. Dit moet een getallenas worden. Plaats de breuk 2/3 op de getallenas. 2/3 is kleiner dan 1.

B28a)

Waar plaatsen jullie 0 en 1?

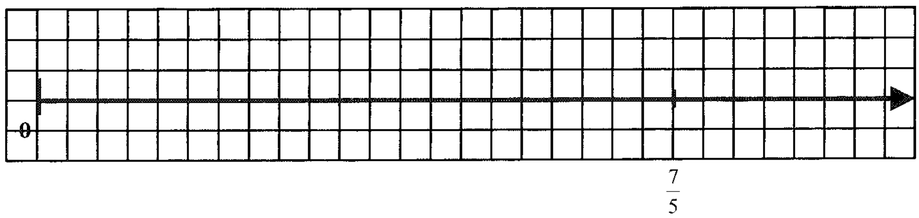
Een leerling die 1, 2, 4, 5, ... ruitjes kiest tussen 0 en 1, heeft het moeilijker dan een leerling die er 3, 6, 9, ... kiest.

Onderzoek tijdens een leergesprek de gekozen ijken. Laat de leerlingen ervaren dat er verschillende mogelijkheden zijn.



Bied rekensterke leerlingen een oefening aan als:

- *Teken een getallenas en plaats er de breuken 1/4, 3/4 en 5/3 op. Plaats eerst de getallen 0 en 1, maar doe dit "verstandig".*
- *Waar staat 1 op de volgende tekening?*



Lees- en schrijfwijze
G15

Analyseer samen met de leerlingen de woorden breuk, teller en noemer.

Het woord 'breuk' herkennen de leerlingen in 'been- en armbreuk'. 'Breuk' roept het woord 'breken' op, enz.

'Noemer' verwijst naar 'noemen', 'naam'. De noemer geeft de naam aan de breuk. De noemer geeft aan in hoeveel gelijke delen het geheel verdeeld is of moet verdeeld worden.

'Teller' verwijst naar 'tellen'. De teller geeft aan (telt) hoeveel van de gelijke delen de leerlingen moeten nemen.

Een stambreuk is een breuk waarvan de teller 1 is.

De termen echte en onechte breuk moeten de leerlingen niet kennen.

In dagbladen en tijdschriften zie je breuken meestal genoteerd met een schuine breukstreep (bijv. 2/3). In het onderwijs geven we er de voorkeur aan de breuk te noteren met een horizontale breukstreep. De schuine breukstreep kan in combinatie met andere tekens en cijfers aanleiding geven tot verwarring.

B28a)

$$\frac{2}{3}$$

Merk op dat 2/3 x 6 kan geïnterpreteerd worden als 2: (3 x 6).
(zie ook B4 - B5 - B6)

Leerlingen moeten wel de breuk met een schuine breukstreep kunnen lezen.

Om een breuk te lezen, lees je eerst de teller en daarna de noemer met toevoeging van 'de' of 'ste'.

1/2: 'één tweede',
10/8: 'tien achtste'
Uitzonderingen:
2/3: 'twee derde',
5/1: ' vijf op één' (geldt voor alle breuken met noemer 1)
1/2: ook als 'een half' of 'de helft',
1/4: 'een kwart'.

Een breuk wordt niet voorafgegaan door een lidwoord en krijgt geen meervoudsuitgang tenzij de nadruk op de afzonderlijke delen.

- *"Verdeel de taart in zes gelijke stukken. Drie zesde van de taart staat nog op tafel, de andere drie zesden werden afzonderlijk verpakt."*
- *"Twee derde van de groep kiest voor schaken."*
- *"Drie honderdste is drie procent."*
- *"Drie vijfde en twee vijfde is vijf vijfde."*

De breuk wordt beschouwd als een zelfstandig deel van een geheel. Noteer daarom de bijhorende werkwoordsvorm in het enkelvoud.

Gelijkwaardige breuken
G16d)

Om te kunnen spreken van gelijkwaardige breuken, moet het om breuken gaan van eenzelfde grootheid.

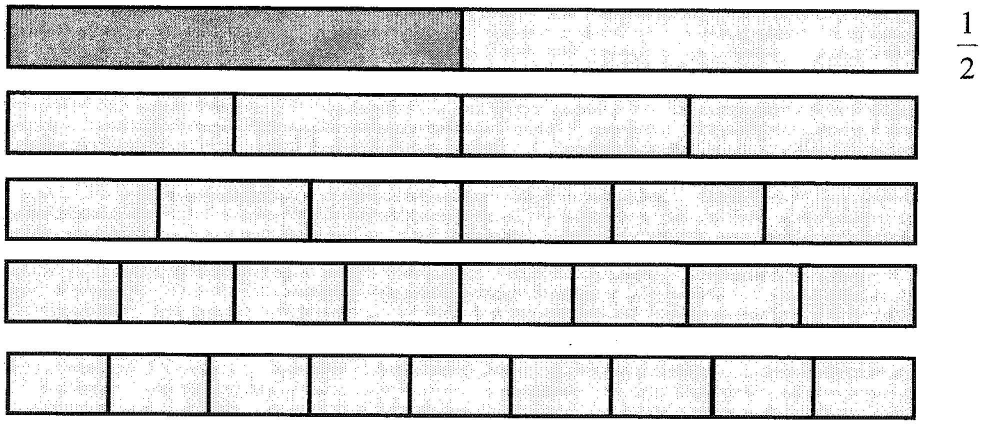
Ga op concreet niveau uit van eenheden die natuurlijke onderverdelingen hebben.

Verdeel een reep of tablet chocolade in 4, 6, 8 of meer gelijke stukjes.
"Wat kies je: 1/2 reep, 2/4 reep of 4/8 reep?"

De leerlingen ervaren dat ze een deel van eenzelfde geheel met verschillende breuken kunnen benoemen.
Ze zeggen dat 1/2, 2/4 en 4/8 gelijkwaardige breuken zijn omdat ze dezelfde waarde uitdrukken.

Op schematisch niveau maken de leerlingen oefeningen maken als volgt:

"Kleur van iedere reep de helft blauw en noteer telkens met een andere breuk welk deel van de reep je gekleurd hebt."
Vul aan 1/2 = ./. = ./. = ./.



Bij deze oefening gaat het erom gelijkwaardige breuken te ontdekken en gaat het er niet om op de regel te formuleren.

Een andere instap voor gelijkwaardige breuken is het eerlijk verdelen.

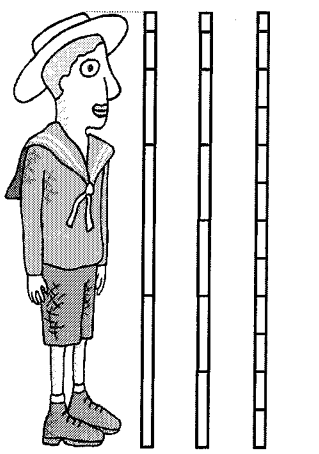
Aan een kleine tafel brengt men drie pannenkoeken voor twee leerlingen.
Aan een grote tafel brengt men zes pannenkoeken voor vier leerlingen.
De pannenkoeken worden eerlijk verdeeld.
"Op welke manieren kunnen jullie de pannenkoeken eerlijk verdelen?
Aan welke tafel krijgt elke leerling het meest?"

Bij het onderzoeken van dit probleem, ontdekken de leerlingen vanzelf gelijkwaardige breuken.

MR14

Meetopdrachten met stroken van dezelfde lengte, maar met andere onderverdelingen bieden de mogelijkheid om gelijkwaardige breuken te ontdekken.

"Meet de lichaamslengte van je buur."



Jan meet 2 volle stroken, een halve, een kwart en een achtste strook of 5 halve, een kwart en een achtste strook of 11 kwart en een achtste strook.

Jan meet 2 volle stroken, een halve, een kwart en een achtste strook of 5 halve, een kwart en een achtste strook of 11 kwart en een achtste strook.

Na dergelijke meetopdrachten kunnen leerlingen gelijkwaardige breuken op een getallenas plaatsen.

Gelijkwaardige breuken bepalen eenzelfde punt op een getallenas en omgekeerd.

Vereenvoudigen

G16c

Een breuk vereenvoudigen wil zeggen: overgaan op een gelijkwaardige breuk waarvan de teller en de noemer kleinere getallen zijn. Kan de breuk niet meer verder vereenvoudigd worden, dan is de breuk herleid tot haar eenvoudigste vorm: een onvereenvoudigbare breuk.

De leerlingen moeten deze term niet kennen.

Vereenvoudig een breuk enkel als dit functioneel is in de gegeven situatie. De eenvoudigste vorm van een breuk geeft immers niet noodzakelijk de betekenis van een situatie het beste weer.

Een breuk compliceren wil zeggen: overgaan op een gelijkwaardige breuk waarvan de teller en de noemer grotere getallen zijn. Compliceer een breuk enkel als dit functioneel is in de gegeven situatie.

"Jan heeft 20 van de 25 vragen van een toets opgelost."

Of:

"Jan heeft 20/25 van de toets opgelost, of 4/5 of 80/100."

In deze situatie is 80/100 of 80 % beter gekend en makkelijker te interpreteren dan de eenvoudigste vorm 4/5.

De breuk 20/25 werd hier gecompliceerd tot 80/100.

De term compliceren is een term die niet in de basisschool wordt gebruikt.

Breuken vergelijken en ordenen

G16

Stambreuken

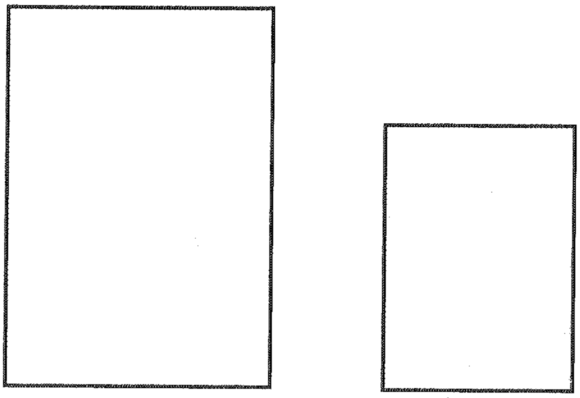
G16a)

Bied leerlingen eerst situaties aan waar vergelijkingen van breuken een betekenis krijgen.

- *"Wat is het grootst: 1/2 reep chocolade of 1/3 reep?"*
- *"Wat is het langst: een potlood van 1/2 strook lang of een potlood van 1/3 strook lang?"*
- *"Wanneer krijgt elk kind het meest, als ik één pizza eerlijk verdeel onder twee of onder drie leerlingen"?*

Pas nadat leerlingen met die vergelijkingen in situaties vertrouwd zijn, kunnen eerder abstracte vragen gesteld worden als "Welke breuk is de grootste 1/2 of 1/3?". Benadruk bij het materialiseren bijvoorbeeld met behulp van het breukbord, dat de leerlingen altijd moeten uitgaan van hetzelfde geheel.

Je moet de helft van een blad volschrijven. Wie moet het meest schrijven? Mieke of Silke?



Mieke Silke

Gebruik het strookmodel en de getallenas om stambreuken op schematisch niveau te vergelijken.

MR12

Bij de vorming van het breukbegrip ontdekken de leerlingen dat de deeltjes kleiner worden als de noemer groter wordt (telkens ten opzichte van eenzelfde geheel).

Uiteindelijk komen de leerlingen zelf tot de vaststelling:
In een reeks stambreuken is de grootste stambreuk die met de kleinste noemer.

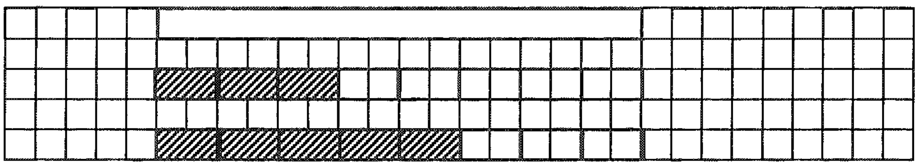
Breuken met dezelfde noemer
G17b)

Vul in. Kies uit: <, =, >
3/8 ... 5/8

Ga uit van een concrete probleemstelling (eerlijk verdelen, een deel-geheel- probleem of een meetprobleem). Maak gebruik van bijvoorbeeld het breukenbord of van breukenstaafjes. Beklemtoon dat de leerlingen moeten uitgaan van hetzelfde geheel.

Op schematisch niveau kunnen de leerlingen het strookmodel of de getallenas gebruiken.

Geef de leerlingen ruitjespapier en laat hen zelf de eenheid kiezen.



De leerlingen merken op dat de breuken 3/8 en 5/8 dezelfde noemers hebben. Dergelijke breuken zijn gelijknamige breuken (gelijke noemers - gelijke namen - gelijknamige breuken).

Leerlingen stellen enkele 'regels' vast wanneer ze gelijknamige breuken vergelijken:

- het geheel moet telkens hetzelfde zijn, anders kan je niet vergelijken,
- hoe groter de teller, hoe meer deeltjes je moet nemen,
- hebben twee breuken dezelfde noemer, dan is de breuk met de grootste (kleinste) teller het grootst (kleinst).

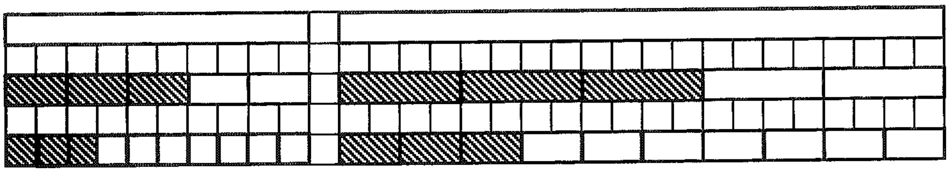
Breuken met dezelfde teller
G16b)

- *Vul in. Kies uit: <, =, >*

  3/5 ... 3/10

Benader deze oefeningen op dezelfde manier als de oefeningen met breuken met dezelfde noemer.

Op schematisch niveau is het zeer belangrijk dat de leerlingen zelf het geheel aanduiden. De leerlingen ervaren dat ze breuken moeten nemen van eenzelfde geheel om ze met elkaar te vergelijken.



$\frac{3}{5} > \frac{3}{10}$ $\frac{3}{5} > \frac{3}{10}$

Uiteindelijk ontdekken de leerlingen: 'Hebben twee breuken dezelfde teller, dan is de breuk met de grootste (kleinste) noemer het kleinst (grootst).'

Willekeurige breuken
G16d, G17 en G35
DO5c

Om na te gaan of breuken gelijkwaardig zijn, is het meestal handig ze gelijknamig te maken. Dan vallen ze onder één van de hierboven beschreven categorieën.

Vul in. Kies uit: <, =, >

4/6 ... 1/3
5/8 ... 3/4

Zulke oefeningen zijn op te lossen door een 'steunpunt' te gebruiken. Bijvoorbeeld 1, 1/2, ...

Vul in: <, =, >

7/4 ... 2/3 7/4 > 1 en 1 > 2/3 dus ...
2/5 ... 4/7 2/5 < 1/2 en 1/2 < 4/7 dus ...
5/6 ... 3/4 5/6 is 1/6 minder dan 1 en 3/4 is 1/4 minder dan 1,

1/4 > 1/6 dus ...
3/4 ... 4/6 ...

Bij de laatste twee breuken is het niet eenvoudig te zien welk breuk het grootst is. De leerlingen ontdekken dat ze zulke breuken moeten vervangen door gelijkwaardige breuken die gelijknamig zijn.

Breuken gelijknamig maken
G17
B26 en B27

Hoe vergelijk je nu 3/4 met 4/6?

Ga uit van een deel-geheel-probleem, eerlijk verdelen of een meetprobleem.

"An en Piet hebben eenzelfde tablet chocolade.
An eet 3/4 van haar tablet op.
Piet eet 4/6 van zijn tablet op.
Wie eet het meeste chocolade?
Hoeveel meer?
Hoeveel eten ze samen op?"

Eerst zoeken de leerlingen uit van welke tablet ze gemakkelijk 3/4 en 4/6 kunnen nemen.

"Hoeveel stukjes kan zo'n tablet bevatten?" (12, 24, enz.).

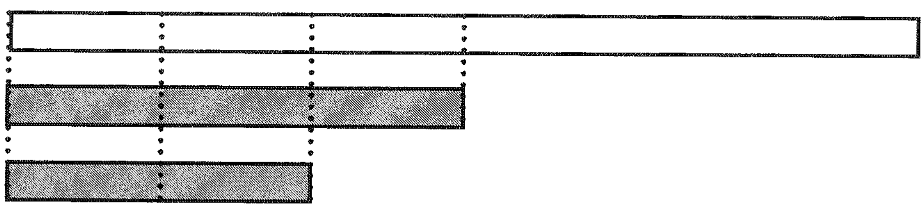
Dit probleem leidt er niet alleen toe dat leerlingen breuken gelijknamig maken, maar ook dat ze breuken aftrekken en optellen

Breuken gelijknamig maken moet zoveel als mogelijk functioneel zijn bijvoorbeeld in probleemstellingen. Beperk deze probleemstellingen meestal tot eenvoudige breuken. Bijvoorbeeld breuken waarvan de noemer < 20 en waarvan de noemer meerdere delers heeft; noemers als 25, 50 en 100 (vooral in het kader van kommagetallen en procenten) kunnen voorkomen.

De term "eenvoudig" krijgt dus vooral betekenis in concrete situaties.

Oefeningen als 8/294 en 91/210 gelijknamig maken, zijn geen leerstof voor de basisschool.

Geef pas oefeningen op abstract niveau wanneer leerlingen voldoende vertrouwd zijn met de begrippen gelijkwaardige en gelijknamige breuken.



Een leergesprek leidt tot het volgende besluit: om de breuken 1/2 en 1/3 gelijknamig te maken, vervang je die breuken 1/2 en 1/3 door gelijkwaardige breuken met dezelfde noemer. Die noemer moet een veelvoud zijn van 2 en 3.

Kies liefst het kleinste getal waar 2 en 3 precies ingaan; met andere woorden het kgv (kleinste gemeenschappelijk veelvoud) van 2 en 3.

G32

Zo ontstaat een soort 'regel': 'Om twee breuken gelijknamig te maken, herleid je ze tot gelijkwaardige breuken waarvan de noemer het kleinste gemeenschappelijk veelvoud is van de oorspronkelijke noemers.'

Breuken herstructureren

G18

Breuken herstructureren betekent ondermeer breuken opsplitsen.

- *4/3 is 1 en 1/3*
- *6/6 is 2 keer 3/6*
- *2/3 is 1/3 minder dan 3/3 of één geheel*

Het laatste voorbeeld is geen splitsing maar wel een herstructurering. Je ziet namelijk 2/3 in relatie met het geheel 3/3 waarbij het verschil tussen beide breuken aan bod komt.

Gebruik in de lagere school de notatie voor een onechte breuk in de vorm van een gemengd getal niet meer. Dat is in afspraak met de leerplancommissie wiskunde voor het secundair onderwijs.

Merk op dat 2 1/4 in het secundair onderwijs kan verward worden met 2 . 1/4 (= 2 x 1/4).

Schrijf 9/4 dus niet als 2 1/4 maar wel als 2 en 1/4 of 2 + 1/4

1.2.6 KOMMAGETALLEN

Kommagetallen herkennen en lezen
G19

Leerlingen ontmoeten in hun omgeving regelmatig kommagetallen. Zeker wanneer ze met geld omgaan.

- *Een benzineprijs van 0,86 euro per liter,*
- *Een taart kost 4,75 euro of 4 euro en 75 (euro)cent.*

Vanaf het tweede leerjaar moeten kinderen in beperkte mate kennis maken met geldwaarden in euro. Daartoe leren ze geldwaarden met hoogstens 2 decimalen lezen.

- *2,50 euro als twee en een halve euro,*
- *3,25 euro betekent 3 euro en 25 (euro)cent; dat is meer dan 3 euro en minder dan 4 euro,*
- *7,35 euro lezen de leerlingen als 7 euro 35 cent, 7 komma 35 euro, 7 euro 35 ...*

Kommagetallen invoeren
G20 en G21

Ga aanvankelijk - vanaf het 4e leerjaar - uit van metingen en de bijbehorende notaties van de meetresultaten.

De inhoud van een brikpakje fruitsap of melk van 0,2 l,
een fles cola van 1,5 l,
een lichaamstemperatuur van 38,2 °C,
een omgevingstemperatuur van 20.5 °C (digitale thermometer),
een kilometerpaaltje langs de autoweg ...

Kommagetallen worden dikwijls genoteerd met een punt in plaats van met een komma; bijvoorbeeld getallennotaties op kilometerpaaltjes (15.1 km), op digitale thermometers, op weegschalen en op rekenmachientjes.

Na kennismaking met kommagetallen in de meetoefeningen breng je kommagetallen aan als een uitbreiding van het plaatswaardesysteem.

In heel wat situaties werken de leerlingen met kommagetallen:

- *"Meet de lengte (breedte, dikte, ...) van enkele voorwerpen."*
- *"Een blad uit mijn schrift is precies 21 cm lang. De breedte ligt tussen 16 en 17 cm. De breedte is 16 cm en 4 mm of 164 mm of 16 cm + 4/10 cm."*
- *"Druk de gemeten lengte in één getal uit en gebruik als maat de centimeter." De leerlingen schrijven 16,4 cm en lezen 16 komma 4 cm of 16 en 4 tiende cm of 16 cm en 4 mm.*
- *"Hoe groot ben jij?" De leerlingen gaan om beurt tegen de muur staan. Teken hun lengte af op een stuk papier.*

- *Een krantenartikel als lesinstap ... 'In 1995 sprong hinkstapspringer Edwards een wereldrecord van 18,29 meter. Teken dit op een getallenas ...'*
- *'In het verspringen is men op weg naar de negenmetergrens. Zo sprong in 1986 Bob Beamon 8,90 m en in 1991 sprong Mike Powell 8,95 m. Teken die afstand in de klas.'*
- *Giet een klein brikje fruitsap uit in een maatbeker. Stel vast dat de inhoud van het brikje 2/10 l bedraagt. Noteer 2/10 l = 0,2 l en lees twee tiende liter.*

Kommagetallen in het strookmodel

Bied de leerlingen twee soorten stroken aan. De eerste soort vormen de eenheidsstroken. Die eenheidsstroken hoeven niet exact één meter lang te zijn. Tenzij je kiest om het verband te leggen met de lengtematen. De tweede soort zijn de 1/10e stroken die precies één tiende van de lengte van een eenheidsstrook zijn.

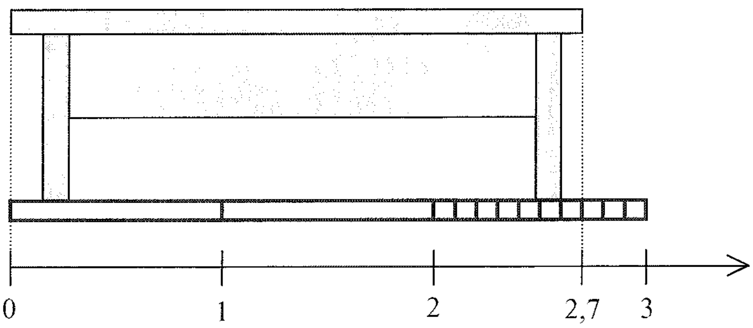
Meet met die stroken de opgegeven lengten.

De lengte van de bank is 2 en 7/10 strook.

Noteer dit kort als een kommagetal.

Tussen welke twee opeenvolgende natuurlijke getallen ligt dit kommagetal?

Ligt 2,7 dichter bij 2 dan bij 3?



Lees 2,7 als 'twee gehelen en 7 tiende' of '2 eenheden en 7 tiende' of 'twee komma zeven'.

Benadruk dat een kommagetal altijd tussen twee opeenvolgende natuurlijke getallen ligt.

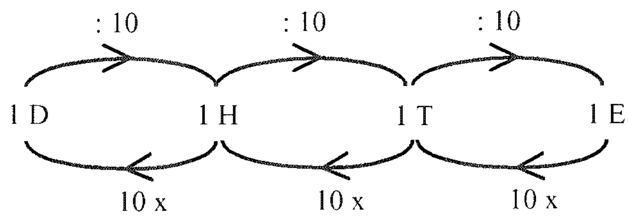
De kommagetallen als uitbreiding van het plaatswaardesysteem
G20

Herhaal eerst grondig de opbouw van ons tientallig getallensysteem.

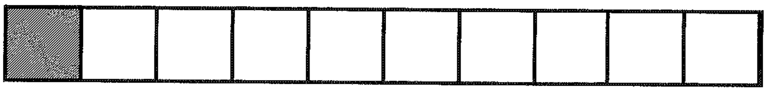
Vertrek van een gekend getal: bijv. 728

Wat is de waarde van de cijfers 8, 2 en 7 in dit getal?

Stel de relaties tussen de verschillende cijfers aanschouwelijk voor:



Verdeel de 'eenheid' in 'tienden' met behulp van het strookmodel.

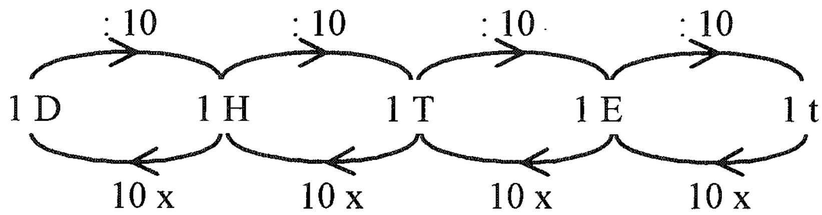


Arceer één van de tien gelijke stukken. Duid dus 1/10 aan.

Neem alle stukken of 10/10. Samen vormen ze het geheel of de eenheid. Dus, 10 tienden = 1 E.

Schrijf vanaf nu één tiende ook als 1 t.

Breid de getallentabel vanaf nu uit naar rechts.



:10 :10 :10 :10

D	H	T	E	t
				1

Plaats een komma achter het cijfer van de eenheden. Om de plaats van de eenheid te kennen wanneer je het getal zonder tabel schrijft

Hoeveel eenheden hebben we hier? (nul) Dus 1/10 = 0,1.
'nul eenheden één tiende' of kort 'één tiende.'

M.A.B.-materiaal

Hebben de leerlingen gewerkt met MAB-materiaal, met een abacus of met gekleurde schijfjes om de eenheden, tientallen en honderdtallen te materialiseren, dan kunnen ze dit materiaal verder gebruiken om de kommagetallen concreet voor te stellen.

Om leerlingen duidelijk te maken waarom ze voortaan de grote kubus moeten gebruiken om de eenheden voor te stellen geef je een klein kubusje van 1 cm^3 in klei. De leerlingen en de leerkracht verdelen een kubusje in 10 plakjes. Ze proberen ook een plakje in 10 kleine staafjes te snijden. Nu ervaren de leerlingen dat het eigenlijk onmogelijk is om met dit materiaal tienden, honderdsten en zeker duizendsten voor te stellen. Spreek daarom met de leerlingen af om als eenheid de grote kubus te gebruiken. Een tiende wordt een plak, als honderdste verschijnt een staaf en als duizendste een blokje.

Net zoals bij de natuurlijke getallen worden de termen 'groeperen' en 'inwisselen' veelvuldig gebruikt.

Gekleurde schijfjes

Je kan ook zelf materiaal ontwikkelen dat gebaseerd is op het principe van het M.A.B.-materiaal. Elke tiendelige eenheid krijgt een specifieke kleur. Een blauwe schijf (1 E) kun je inwisselen tegen 10 groene (10 t), enz...

Doosjes

Het gebruik van doosjes laat toe dat men 'echt' kan wisselen.

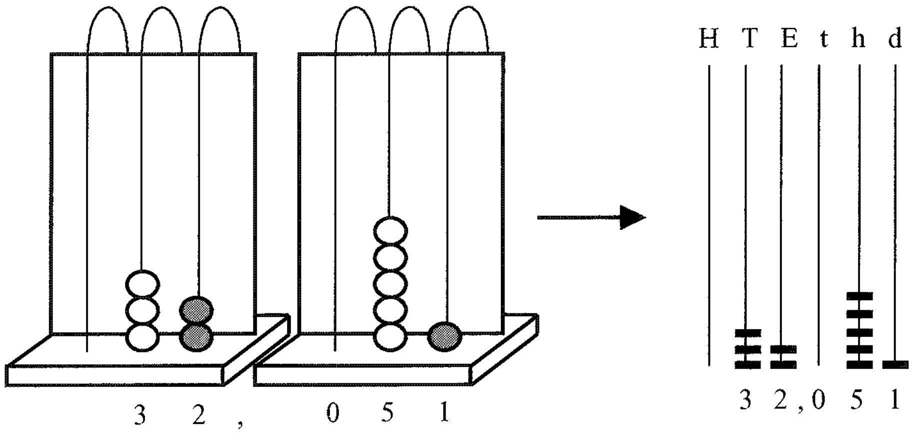
Een doos met 10 sigarenkistjes is de eenheid.

Een sigarenkist (= 1t) bevat 10 lucifersdoosjes (1 luciferdoosje = 1h).

In elk luciferdoosjes zitten 10 (gebruikte) lucifers (1 lucifer = 1 d).

Lusabacus

Meestal schuift men twee abaci tegen elkaar. Op de eerste abacus zet men de E, T en H en op de tweede abacus de t, h en d. Men gaat vrij snel over op getekende abaci en nadien op de tabel.



De leerlingen gebruiken een kaart waarop de onderstaande tabel is afgebeeld. De getallen zelf materialiseren ze met pionnen of schijfjes. Vervang het gebruik van de pionnen snel door de notatie van de getallen in de tabel. Materialiseer de getallen klassikaal op een magneetbord waarop de tabel staat afgebeeld.

206,3

H	T	E	t
● ●		● ● ● ● ● ●	● ● ●

Basisinzichten

Wanneer de leerlingen hebben kennis gemaakt met de kommagetallen, moeten ze volgende inzichten bezitten.

- In het tientallig stelsel is de verhouding tussen twee opeenvolgende eenheden, ook achter de komma, gelijk aan tien. Deze eenheden achter de komma worden respectievelijk tiende (t), honderdste (h), duizendste (d) genoemd.

In het getal 3,42 stelt 3 het cijfer van de eenheden voor, 4 het cijfer van de tienden en 2 het cijfer van de honderdsten.

- Eis van leerlingen dat ze op verschillende manieren kommagetallen kunnen lezen.

  3,42 moeten leerlingen kunnen lezen als 3 gehelen en 42 honderdste, en 3 komma 42.

Probeer met leerlingen eens de volgende oefening.

- *Welk getal ligt precies in het midden van 3,1 en 3,3?*
- *Welk getal ligt precies in het midden van 3,3 en 3,5?*
- *Welk getal ligt precies is het midden van 3,5 en 3,6?*

Bij de laatste opgave helpt het herschrijven van de kommagetallen. Zo zal de opgave eenvoudiger worden met 3,50 en 3,60.

- *Welk getal ligt precies in het midden van 3,8 en 3,9?*
- *Welk getal ligt precies in het midden van 3,9 en 3,10?*

Met de allerlaatste oefening komt de discussie pas volop op gang. Leerlingen die enkel letten op '9' en '10' komen bijvoorbeeld tot de foute oplossing 3,95 en merken niet op dat het tweede getal kleiner is dan het eerste.

- Let op de volgorde van de cijfers.

  4 h + 3 t = 0,34 en niet 0,43

- Indien een getal geen gehelen bevat, schrijf dan een nul op de plaats van de eenheden, bijvoorbeeld 0,25. De komma dient precies om de plaats van de eenheden aan te geven.

- De cijfers van de tientallen en de tienden staan symmetrisch ten opzichte van het cijfer van de eenheden en niet ten opzichte van de komma (idem voor de cijfers van de honderdtallen en de honderdsten, enz....).

  In 23,45 heb je 2 tientallen en 4 tienden.

- Duid de afwezigheid van tienden of honderdsten aan door een nul te schrijven op de corresponderende plaatsen. Een nul na het laatste beduidende cijfer na de komma mogen de leerlingen enkel weglaten in rekengetallen. In maatgetallen mag dit niet. Daar geeft ze immers de nauwkeurigheid aan waarmee gemeten is.

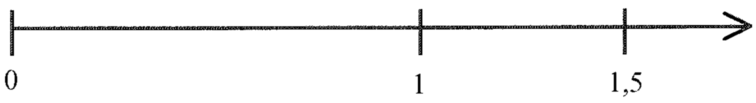
Laat de leerlingen twee voorwerpen of stroken meten van respectievelijk 1 m en 4 cm en 1 m en 40 cm lang en hun meetresultaten noteren: 1,04 m en 1,40 m. In de notatie 1,04 m speelt de nul een essentiële rol en mogen we ze niet weglaten. Laat ook in 1,40 m de nul niet weg omdat het laatste cijfer aangeeft hoe nauwkeurig we gemeten hebben, in dit geval tot op 0,01 m nauwkeurig.

Kommagetallen ordenen en aanduiden op een getallenas
G22

Je kan een meetlat, een thermometer, ... gebruiken als een deel van een getallenas

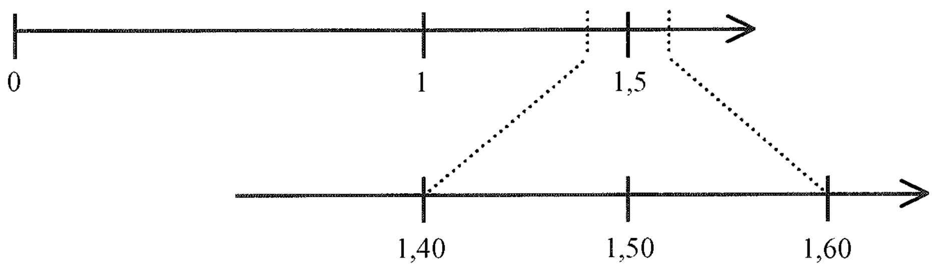
Bij de introductie van kommagetallen via meten, kan je maatgetallen afbeelden op een getallenas.

Deze strook papier is 1,5 m lang.



"Wat betekenen de getallen 1,50 en 1,500 en waar plaats je ze op deze getallenas?"

Het is belangrijk dat de leerlingen eerst de kommagetallen kunnen situeren tussen twee natuurlijke getallen. Om getallen met twee of meer cijfers na de komma te plaatsen op de getallenas kan je een stuk van de as uitvergroten.



Wanneer kinderen oefenen om kommagetallen te ordenen is het belangrijk dat je kommagetallen aanbiedt met een verschillend aantal cijfers na de komma.
Grijp bij fouten als 1,2 < 1,15 terug naar betekenisvolle situaties.

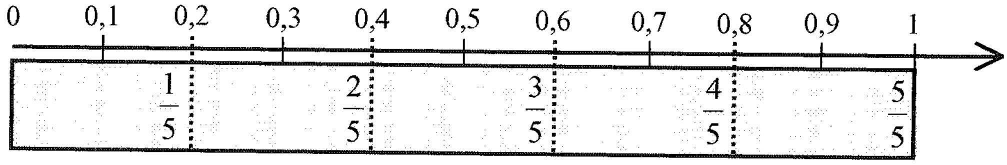
Een lint van 1,2 m of 120 cm is langer dan een lint van 1,15 m of 115 cm.

Laat leerlingen ook de omgekeerde oefeningen maken waarbij ze moeten zeggen welk getal bij een plaats op een getallenas hoort.

G23

Laat een groep leerlingen een meetstrook maken met een onderverdeling in tienden. Een andere groep leerlingen verdeelt een even lange meetstrook in vijf gelijke delen en benoemt de verdeelpunten met breuken.

Ze meten verschillende voorwerpen. Door de meetresultaten te vergelijken, ervaren de leerlingen het verband tussen 1/5 en 0,2 en 0,4 ...



Kommagetallen herstructureren
G24

Kommagetallen herstructureren is op zoek gaan naar splitsingen, structuren en verhoudingen tussen en van kommagetallen.

- *0,75 is 0,50 en 0,25*
- *0,80 is 4 keer 0,20*
- *0,90 is 0,10 minder dan 1*
- *0,65 is 6t en 5h.*

Zie ook G13 natuurlijke getallen herstructureren en G18 breuken herstructureren

1.2.7 PERCENTEN

Het begrip percent

Los volgende oefeningen op.

- *"De eerste bokaal is voor ongeveer 50% gevuld met ongezoet fruitsap van de beste kwaliteit. Er zit 12 % vruchtvlees in het fruitsap.*

De tweede beker is met hetzelfde fruitsap gevuld.
Voor hoeveel percent is deze beker ongeveer gevuld?
Hoeveel percent vruchtvlees zit in het fruitsap van de tweede beker?"
Antwoord
De eerste beker is voor ongeveer 50 % gevuld en het fruitsap bevat precies 12 % vruchtvlees. De tweede beker is voor ongeveer 20 % gevuld en het fruitsap bevat eveneens precies 12 % vruchtvlees.

- *"Vader vult de wasmachine voor 80 % met hemden van zichzelf waar overal 60 % katoen in zit. Bij een volgende wasbeurt vult vader de wasmachine voor ongeveer de helft van de eerste wasbeurt met kleine hemden van Tomas. Hij drukt op de spaartoets en de machine doet de rest. De hemden van Tomas en zijn papa zijn van dezelfde stof gemaakt.*
Voor hoeveel percent is de machine met Tomas' hemden gevuld? (40 %)
Hoeveel percent katoen zit in één hemd van Tomas? (60 %)
En in twee hemden van Tomas?" (60 %)

Deze oefeningen laten de relativiteit van het begrip percent zien. Het is niet eenvoudig om in te zien dat het hoogteniveau bij de bekers wel een rol speelt om de procentuele vulling aan te duiden, maar dat ditzelfde niveau geen rol speelt bij bijvoorbeeld een procentuele vergelijking van de ingrediënten.

G25, G26, G27

Ga over naar gelijkwaardige breuken met noemer 100, percenten dus, van zodra leerlingen inzicht hebben in gelijkwaardige breuken.

Een gegeven percent kan een verhouding uitdrukken.

B35

Van de 100 veldjes van een speelveld zijn er 20 bezet, met andere woorden 20 %.
Van een ander speelveld zijn 50 van de 250 velden bezet. Beide speelvelden hebben dan eenzelfde bezettingsgraad: 50 op 250 komt neer op 1 op 5 of 20 op 100, dus ook op 20 %.

Toon deze situaties met honderdvelden en noteer met verhoudingstabellen.

Zo kan voorgaand voorbeeld geïllustreerd worden met de volgende tabel.

Aantal bezette velden	50	1	20
Totaal aantal velden	250	5	100

Percenten zijn interessant om verhoudingen gemakkelijker met elkaar te vergelijken.

Jan behaalde 20 op 25 voor wiskunde en 30 op 40 voor Nederlands. Voor welk onderdeel heeft Jan het best gepresteerd?

Wiskunde

behaald	20	80
totaal	25	100

Nederlands

behaald	30	15	75
totaal	40	20	100

Voor wiskunde behaalde Jan 80 % en voor Nederlands 75 %, dus voor wiskunde heeft hij het best gepresteerd.

Percenten als operator komen vaak in alledaagse situaties voor.

In kranten, tijdschriften en reclameblaadjes kunnen leerlingen volgende aanduidingen vinden:
10 % korting, 15 % duurder,
5 % toe- of afname, 21 % BTW, enz.

Meestal kennen de leerlingen het geheel waarop ze de korting, de toe- of afname, de BTW, ... moeten berekenen.

Percenten komen veel in breukvorm voor (bijv. 15 % als 15/100). Hebben de leerlingen geleerd hoe ze de breuk als operator moeten gebruiken, dan kunnen ze die oefeningen oplossen.
Facturen van aankopen van apparaten of boeken en rekeningen van elektriciteit, telefoon en water zijn interessante materialen. De leerlingen maken kennis met het begrip BTW, de verschillende BTW- tarieven en rekenen ook de BTW- bedragen na die op deze facturen en rekeningen voorkomen.

Veel moeilijker wordt het als leerlingen het geheel willen berekenen vertrekkend van een gekend deel dat uitgedrukt is als een percent van het geheel.

In de schoolkrant lazen we dat 280 leerlingen meededen aan de sponsorloop voor Broederlijk Delen. Volgens de directeur kwam dit neer op 90 % van het aantal leerlingen, het hoogste percentage van de laatste vijf jaar.
Kunnen jullie met deze gegevens berekenen hoeveel leerlingen deze school telt?

Een verhoudingstabel kan helpen de gegevens en het gevraagde schematisch voor te stellen.

aantal lopers	90					280
totaal aantal leerlingen	100					?

Problemen waarbij de beginsituatie niet gekend is en waarbij een toe- of afname heeft plaatsgevonden, zijn moeilijk.

- *"Een computer kost 40 000 fr. BTW inbegrepen.*
  Hoeveel frank bedraagt de BTW?"
- *"Tijdens de koopjesdagen betaalden we 1500 fr. voor een broek.*
  De verkoper beweerde dat we een echt koopje deden aangezien hij een korting van 40 % had gegeven.
  Wat kostte die broek vóór de koopjesdagen?"

Voor de leerlingen is het niet alleen moeilijk de begrippen die in het vraagstuk voorkomen te benoemen (voorbeeld 2: prijs zonder korting, korting en prijs na korting), maar ook om in te zien dat 60 % van de oorspronkelijke prijs overeenkomt met de nieuwe prijs (1500 fr.).

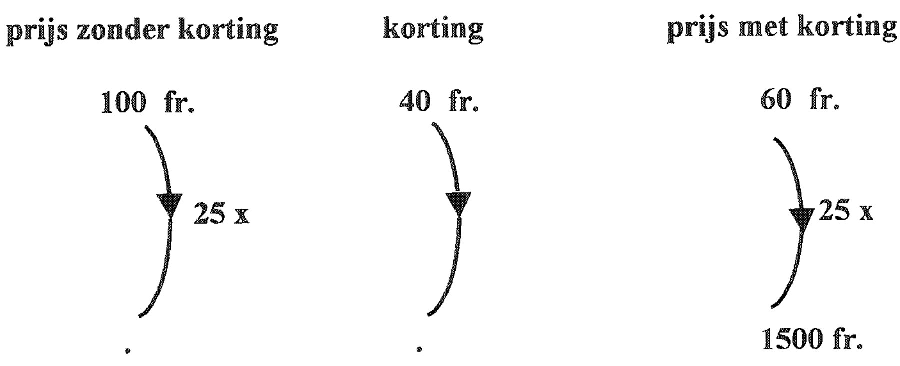
Het schematiseren van dergelijke problemen met een verhoudingstabel of met behulp van een pijlenschema kan helpen om het inzicht te verdiepen.

Maak voor voorbeeld 2 een verhoudingstabel en een pijlenschema.

Prijs zonder korting in fr.	100					?
Prijs met korting in fr.	60					1500

Vul de tabel aan.

Prijs zonder korting in fr.	100	1000	2000	500		2500
Prijs met korting in fr.	60	600	1200	300		1500



1.2.8 NEGATIEVE GETALLEN

G28, G29

Laat leerlingen vanaf het tweede leerjaar in concrete situaties ervaringen opdoen met negatieve getallen.
Vanaf het vierde leerjaar kunnen leerlingen in concrete situaties gehele negatieve getallen lezen, schrijven en vergelijken.
Het is zeker niet de bedoeling dat leerlingen in de basisschool bewerkingen kunnen uitvoeren met negatieve getallen.

Denk hierbij aan waarnemingen tijdens de lessen wereldoriëntatie waarbij leerlingen op een bepaald moment en over een beperkte periode de weersgesteldheid (qua temperatuur, ...) kunnen meten, waarbij ze weerberichten en -grafieken van verschillende plaatsen of verschillende tijdstippen kunnen vergelijken. (PL Wereldoriëntatie p. 105 DS. 7.24)

Hiervoor dienen ze de temperatuur van verschillende soorten thermometers te kunnen aflezen. Zo zijn er ondermeer thermometers waarop de schaalverdeling verticaal wordt aangegeven en 'ronde' thermometers zoals vaak in weerstations te vinden zijn. Er kan ook gewerkt worden met een minimum-maximumthermometer, waar leerlingen de mimimum- en maximumtemperatuur kunnen aflezen.

Ze noteren deze temperaturen en vergelijken ze. Uiteraard zorg je ervoor dat leerlingen in de winter tijdens een koude periode de gelegenheid krijgen om ervaringen op te doen met negatieve getallen. Leerlingen stellen zelf een grafiek op. Van een ingekleurde thermometer naar een staafdiagram of een lijndiagram om winter- en zomertemperaturen te vergelijken is het maar een kleine stap.

- *Vanaf wanneer vriest het?*
- *Wanneer vriest het hard?*
- *Hoeveel graden wijst de thermometer in de diepvriezer aan? ...*

Wanneer leerlingen (weer)waarnemingen noteren, maken ze in feite kennis met de getallenas die wordt uitgebreid met negatieve getallen.

Andere concrete situaties

- *In een lift of trappenhal in een gebouw met kelderverdiepingen kunnen leerlingen aflezen op welke verdieping ze zich bevinden en zien ze in hoeveel verdiepingen ze eventueel moeten stijgen of dalen.*
  "De lift bevindt zich momenteel op -3 en stijgt 2 verdiepingen om iemand te laten uitstappen. Waar stapt die persoon uit?"
  "Wanneer sta je het laagst, op trede -3 of trede -5? Hoeveel lager?"

- *Liften in mijnen bieden een groter getallenbereik en een rijk gegeven. Zo kunnen leerlingen de snelheid van zo'n lift gaan berekenen, kunnen ze opzoeken hoe mijnwerkers vroeger naar beneden werden gelaten...*

- *"Op welke diepte heeft men het wrak van de Titanic gevonden?" (krantenartikel) Kinderen moeten beseffen dat het zeeniveau nul meter is.*

- *"Elk kind heeft tegenwoordig al wel eens gehoord van 'in het rood staan'. Wat betekent dit precies? Leerlingen die bij hun ouders in* *het rood staan, komen ook voor. Wie koopt al eens niet iets waarvoor men nog niet het volledige bedrag bijeengespaard heeft?"*

- *"Wanneer in de krant staat dat een bepaald bedrijf failliet gegaan is of als een firma verlies maakt, wat betekent dit dan precies?"*

- *"In de tabel van de voetbaluitslagen staat een kolom 'negatief doelsaldo'. Hoe zit dat in elkaar?"*

- *"Als het in België dag is, kan het in een ver land nacht zijn. Als je naar zo'n land moet telefoneren, moet je in de gaten houden dat je niemand uit zijn bed belt. In het telefoonboek staan de uurgordels waarbij het vermelde uur overeenkomt met het middaguur van België. (Er werd geen rekening gehouden met een eventueel zomeruur.) Deze tabel kan je ook interpreteren als een concrete situatie met negatieve getallen."*

- *"Ik sta op het ganzenbord op 4 en ik moet 5 plaatsen terug."*

- *"Met knikkeren had ik nog maar 12 knikkers en ik verlies er op de speelplaats 14. Kan dit?"*

1.2.9 DELERS EN VEELVOUDEN

G33, G34

Hoofdrekenen steunt op drie pijlers:

- Inzicht hebben in het tientallig positioneel getallensysteem
- De eigenschappen van bewerkingen flexibel kunnen toepassen
- Gebruik maken van de eigenschappen die verband houden met deelbaarheid en veelvouden

B4, B5, B6, B7, B8

- *Neem het getal 12.*
  Het kan erg handig zijn als de leerling weet dat:
  - *12 = 3 x 4 = 4 x 3 = 2 x 6 = 2 x 2 x 3 = ...*
  - *12 deelbaar is door heel wat getallen: 1, 2, 3, 4, 6 en 12 zelf*
  - *12 een veelvoud is van 3 en 4 bijvoorbeeld om twee breuken op te tellen waarvan de noemers 3 en 4 zijn*
  - *12 een even getal is, maar ook een drievoud ...*

- *En nu het getal 7.*
  - *7 = 1 x 7 = 7 x 1 = ?*
  - *7 is enkel deelbaar door 1 en zichzelf*
  - *7 is enkel een veelvoud van 1 en zichzelf*
  - *7 is een oneven getal*

Ook de omgekeerde beweging komt voor. Zo kunnen leerlingen binnen momenten hoofdrekenen eigenschappen rond 'deelbaarheid' en 'veelvouden' ontdekken.
Vooral bij vermenigvuldigen en delen voelen leerlingen het verschil in moeilijkheidsgraad sterk aan tussen zogenaamde 'rijke' getallen als 12 en zogenaamde 'arme' getallen als 7.

Bram zoekt naar het resultaat van 12 x 7.
"Ik neem 3 x 7, dat is 21. Nu x 4 of 4 x 21 = 84."
"Goed Bram," zegt juf Irena, "je hebt goed gezien dat 12 x hetzelfde is als eerst 3 x en nadien 4 x. Dat is bovendien eenvoudiger. Lukt dit ook als je met 7 zou beginnen?"
Bram kijkt wat onwennig rond. Hij heeft het niet direct door en zegt:
"Zeven is 3 en 4, dus 7 keer 12 is 3 keer 12 en nadien x 4."
"Reken dat eens uit," zegt de juf.
Bram schrikt.

Deler
G30

In essentie is het begrip 'deler' eenvoudig. Een 'deler van een getal' is een getal dat precies een aantal keer in dat getal gaat.

Wat zijn de delers van 6?
1 want 1 gaat precies 6 keer in 6,
2 want 2 gaat precies 3 keer in 6,
3 want 3 gaat precies 2 keer in 6,
6 want 6 gaat precies 1 keer in 6,
0, dat gaat niet, want 0 gaat niet een aantal keer in 6.

Het begrip 'deler' is in verschillende situaties terug te vinden waar op één of andere manier 'verdeeld' wordt.

- *Ik heb 36 boeken en ik wil die in gelijke pakjes verdelen.*
  Hoeveel boeken stop ik in een pakje?

Bedenk verschillende mogelijkheden.

- *In een kwartetspel zitten 32 kaarten.*
  Koen zegt: "Als je dit spel met 3 wilt spelen, dan moet je er 2 opzij leggen." Hoe werkt dat?
  Kan je het spel met 4 spelen zonder kaarten opzij te leggen?

- *Stapeltjes bankbiljetten worden telkens per 25 gebundeld.*
  Komt deze bundeling precies uit voor 75 biljetten van 10 euro?

MR39

- *Meester Tuur legt 18 vierkanten op de rekentafel.*
  Je mag met deze 18 tegels een rechthoekige vloer maken.
  Hoe kan zo'n vloer er uitzien?
  (1 x 18, 2 x 9, 3 x 6, 6 x 3, 9 x 2, 18 x 1)
  Maak een zo groot mogelijk vierkant.
  (18 = 4 x 4 + 2, dus 4 is geen deler van 18)

- *Een bak is gevuld met 24 flesjes frisdrank.*
  Zou die bak er nog anders kunnen uitzien?
  (4 x 6 is een gewone bak, maar het lukt ook met 2 x 12, enz.)

'Nul' en deelbaarheid

Let op voor situaties rond het getal 0.
Het getal 0 kan bijvoorbeeld nooit een deler zijn van een getal. Je kan namelijk nooit dat getal bereiken door een aantal keer 0 te nemen. Maar anderzijds heeft 0 wel oneindig veel delers. Zo kan je 0 door gelijk welk getal (behalve 0 zelf) delen, het blijft altijd 0 en dat is een correcte uitkomst. Het quotiënt van de deling van 0 door 0 kan gelijk welk getal zijn. Men noemt dit een 'onbepaaldheid'. Dit is geen leerstof voor de lagere school.
Dit leerplan kiest er duidelijk voor om wiskunde in betekenisvolle situaties aan te bieden in de basisschool. 'Spitsvondigheden' rond het getal 0 bij deelbaarheid worden dan ook best vermeden. Je kan geen enkele situatie bedenken waar je nood hebt aan de delers van 0. Dat je niet door 0 mag delen is een belangrijk accent van het algebraïsch rekenwerk van het secundair onderwijs.
Laat dus best het getal 0 terzijde als 'delers' en 'deelbaarheid' aan de orde zijn.

'Eén' en deelbaarheid

Eén is een deler van elk getal, het kan altijd precies zoveel keer in dat getal als het getal zelf. Wiskundig noemt met dit een 'onechte' deler. Naast 1 wordt het getal zelf ook als een 'onechte' deler van datzelfde getal gezien. Het getal zelf en het getal 1 zijn geen echte delers. Delen door het getal zelf en door het getal 1 lukt namelijk altijd en geeft geen 'extra informatie'.

Priemgetal

Priemgetallen zijn natuurlijke getallen die precies twee verschillende delers hebben. Zo is 1 geen priemgetal omdat 1 maar één deler heeft, maar zijn 2, 3, 5, 7 ... zijn wel priemgetallen. De term 'priemgetal' hoeven kinderen niet te kennen maar de volgende oefening blijft zinvol.

De Griek Eratosthenes gaf de volgende aanwijzingen om alle getallen met precies twee delers te vinden kleiner dan 100.

- *begin met een honderdveld*
- *doorstreep 1*

- *doorstreep alle veelvouden van 2, maar 2 zelf niet*
- *doe hetzelfde met 3, 5 en 7*

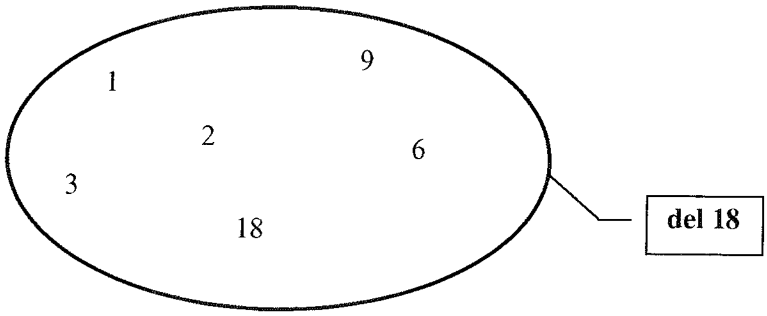
De getallen die overblijven zijn getallen met precies twee delers.
Probeer de richtlijnen van Eratosthenes te volgen. Klopt het verhaal?
Waarom moet je de veelvouden van 4 en 6 niet doorstrepen?
Waarom stop je bij 7? De veelvouden van 8, 9, 10, 11,...?

Beperking tot honderd

Het is voldoende dat leerlingen delers van getallen tot en met honderd kunnen zoeken. Dit betekent niet dat delers van getallen boven honderd niet ter sprake komen. Integendeel, denk bijvoorbeeld aan delers van 'eenvoudige' getallen als 200, 500, 1000, ... Maar de delers zoeken van bijvoorbeeld 4 512 is geen zinvolle opgave.

Alle delers

Gebruik een 'kring' (of venndiagram) om alle delers van een getal overzichtelijk bijeen te brengen. Punten om de elementen aan te duiden hoeven niet (meer).



Gemeenschappelijke delers

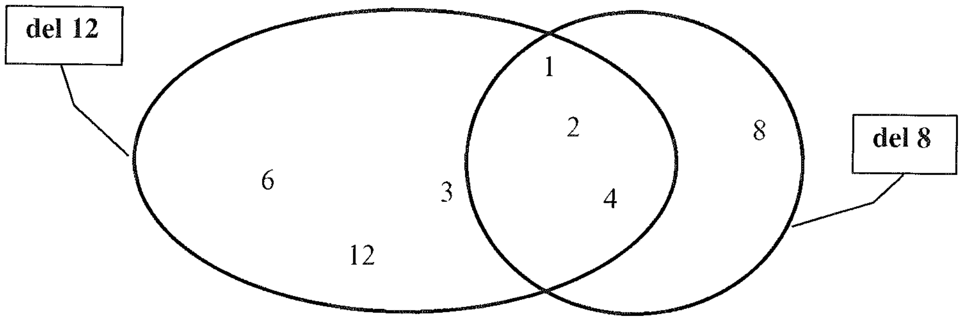
Som eerst alle delers van **twee** natuurlijke getallen op, duid de gemeenschappelijke delers aan.

Grootste gemeenschappelijke deler

De grootste hiervan heet de grootste gemeenschappelijke deler.
Het leerplan beperkt deze zoektocht tot de delers van twee getallen.

Wat zijn de delers van 12? (1, 2, 3, 4, 6 en 12)
Wat zijn de delers van 8? (1, 2, 4 en 8).
Onderstreep de delers die je zowel bij 12 en 8 ziet. (1, 2 en 4).
Die noemen we de gemeenschappelijke delers van 12 en 8.
Het grootste getal, 4, is de grootste gemeenschappelijke deler van 12 en 8.

Om de begrippen 'gemeenschappelijke deler' en 'grootste gemeenschappelijke deler' te visualiseren kan het verzamelingenmodel, zoals hierboven vermeld, een hulp bieden.



Dit model is echter niet noodzakelijk. Zo kunnen leerlingen ook voldoende steun vinden in andere notatievormen.

12	1	2	3	4	6	12
8	1	2	4	8		

Hier worden de delers gewoon naast de getallen geschreven. Duid nu de gemeenschappelijke delers aan en noteer nadien de grootste gemeenschappelijke deler.

Bij het zoeken naar de grootste gemeenschappelijke deler van twee getallen kunnen leerlingen het volgende ontdekken:

- De grootste gemeenschappelijke deler van twee getallen is meestal kleiner dan het kleinste getal.

  De grootste gemeenschappelijke deler van 12 en 8 zal zeker kleiner zijn dan 8. Noteer kort ggd(12,8).

- Soms is de grootste gemeenschappelijke deler het kleinste getal van beide getallen.

  ggd(6,18) = 6, omdat 6 zelf een deler is van 18.

- De grootste gemeenschappelijke deler van twee getallen kan ook 1 zijn. Zo'n getallen worden 'onderling ondeelbaar' genoemd. Deze term is geen leerstof voor de basisschool.

  ggd(12,17) = 1, omdat beide getallen geen gemeenschappelijke delers buiten 1 hebben.

Situaties

Situaties waar delers een rol spelen komen regelmatig voor. Enkele voorbeelden vind je op blz. 58 en 59.
Betekenisvolle situaties waar gemeenschappelijke delers en grootste gemeenschappelijke deler een rol spelen zijn zeldzaam.

Kenmerken van deelbaarheid

Kenmerken van deelbaarheid blijven interessant om inzicht te krijgen in de opbouw van getallen en om de rest te bepalen bij het delen.

- *Waarom zijn 4, 24, 524, 7 524 allemaal deelbaar door 2?*
  Zijn deze getallen ook allemaal deelbaar door 4?
  Bekijk nu de reeks: 4, 14, 214, 3 214 ...
  Welke getallen zijn deelbaar door 2 en 4?

- *Als je 175 euro moet betalen met briefjes van 25 euro.*
  Hoeveel briefjes heb je nodig?

De eerste oefening kan leerlingen op weg zetten bij het ontdekken van de kenmerken van deelbaarheid van 2 en 4. Deze kenmerken hebben duidelijk iets te maken met de tientallige opbouw van ons talstelsel.

Bij de tweede oefening kunnen leerlingen de deling maken of kunnen ze ook gebruik maken van het kenmerk van deelbaarheid door 25.

Deelbaarheid door 2, 5 en 10
G31a

De kenmerken van deelbaarheid door 2, 5 en 10 kun je op een analoge manier aanpakken.
Een aantal mogelijkheden voor de deelbaarheid door 2.

- *Alle even getallen zijn deelbaar door 2 en al die getallen eindigen op een cijfer dat deelbaar is door twee. Het is dus voldoende dat leerlingen naar het laatste cijfer kijken.*

- *Een getal kan je altijd schrijven als de som van zijn eenheden, tientallen, honderdtallen, enz.*
  Neem bijvoorbeeld: 137 = 7 + 30 + 100
  30 en 100 zijn altijd even getallen en deelbaar door 2 (5 en 10). Als 7 deelbaar door 2 (5 of 10) zou zijn, dan zou die hele som deelbaar zijn. Je moet dus eigenlijk alleen maar naar het laatste cijfer kijken om te zien of een getal deelbaar is door 2 (of 5 of 10).

Ontdek en bespreek met de leerlingen analoog de deelbaarheid door 5 en 10.

Een toepassing van deze kenmerken vind je in de restbepaling. Zo kunnen leerlingen de rest bepalen van een deling door 2, 5 of 10 zonder de bewerking zelf uit te voeren.

Deelbaarheid door 4, 25 en 100
G31a

Net als de kenmerken van deelbaarheid door 2, 5 en 10 zijn de kenmerken van deelbaarheid door 4, 25 en 100 op een analoge manier aan te pakken.
Enkele suggesties voor deelbaarheid door 4.

- *Duid op een honderdveld de getallen aan die deelbaar zijn door 4. Het laatste cijfer vertelt zeker niet genoeg, want 12 is deelbaar door 4, maar het laatste cijfer 2 niet. Kijk eens naar de laatste twee cijfers ...*

- *Een getal kan je altijd schrijven als de som van zijn eenheden, tientallen, honderdtallen, enz.*
  Neem bijvoorbeeld: 137 = 7 + 30 + 100
  100 is altijd deelbaar door 4 (25 en 100). Als 37 deelbaar door 4 (25 of 100) zou zijn, dan zou die ganse som deelbaar zijn. Je moet dus eigenlijk alleen maar naar het getal gevormd door de laatste twee cijfers kijken om te zien of een getal deelbaar is door 4 (of 25 of 100).

Ontdek en bespreek met de leerlingen analoog de deelbaarheid door 25. Het kenmerk van deelbaarheid door 100 werd meestal door leerlingen spontaan in hoofdrekenen ontdekt. In een 5e leerjaar weten leerlingen dat een getal dat eindigt op twee nullen deelbaar is door 100.

Ook hier vind je een toepassing van deze kenmerken in de restbepaling. Zo kunnen leerlingen de rest bepalen van een deling door 4, 25 of 100 zonder de bewerking zelf uit te voeren.

Deelbaarheid door 3 en 9
G31b

Kenmerken van deelbaarheid door 3 en 9 ontdekken, is niet zo eenvoudig. Het is natuurlijk gemakkelijk om zomaar de regel aan te bieden en vervolgens te laten toepassen. Zo'n benadering heeft echter geen enkele waarde en geeft integendeel aan kinderen het gevoel dat wiskunde niets anders is dan het toepassen van het juiste 'regeltje'.

Een paar benaderingen die leerlingen op weg kunnen zetten om de 'regel' voor 9 min of meer te ontdekken.

- *Een getal kan je altijd schrijven als de som van zijn eenheden, tientallen, honderdtallen, enz.*
  Neem bijvoorbeeld:
  2 375 = 5 + 70 + 300 + 2 000
  Wat je kan schrijven als
  2 375 = 5 + 7 x 10 + 3 x 100 + 2 x 1000
  Als je nu let op de getallen die deelbaar zijn door 9 en het dichtst in de buurt komen van 10, 100, 1000, enz. komt er:
  2 375 = 5 + 7 x (9 + 1) + 3 x (99 + 1) + 2 x (999 + 1)

  Dit is kan je op zijn beurt herschrijven in:
  2 375 = 5 + 7 x 9 + 7 x 1 + 3 x 99 + 3 x 1 + 2 x 999 + 2 x 1
  = 5 + 7 + 3 + 2 + 7 x 9 + 3 x 99 + 2 x 999

  Een negenvoud (7 x 9 + 3 x 99 + 2 x 999) is altijd deelbaar door 9 (en door 3). Als 5 + 7 + 3 + 2 deelbaar door 9 (of door 3) zou zijn, dan is de som van de cijfers deelbaar, of het getal zelf deelbaar door 9.
  Dus, als de som van de cijfers deelbaar is door 9 (of 3) dan zal het getal zelf ook deelbaar zijn door 9 (of 3).

- *Vul de volgende tabel aan. Gebruik je rekenmachientje waar het zinvol is.*

getal	**rest bij deling van het getal door 9**	**som van de cijfers van het getal**	**rest bij deling door 9 van de som van de cijfers**
87	6	15	6
1 235	2	11	2
...			
...			

De eerste redenering kunnen veel leerlingen niet maken. Maar leerlingen die dit wel kunnen hebben een stukje wiskunde ontdekt op een meer abstract niveau binnen getallenleer. Dat de rest bij delen door 9 dezelfde is als de rest bij delen van de som van de cijfers waarbij 9 de waarde 0 krijgt is een inzicht dat niet direct uit deze benadering af te leiden is. Daarom is de tweede aanpak een stuk eenvoudiger en efficiënter. Alhoewel hier geen wiskundig bewijs wordt gegeven zoals bij de eerste aanpak ontdekken leerlingen wel het kenmerk van deelbaarheid door 9 en de restbepaling bij delen door 9.

B46c

De negenproef, die in vorige leerplannen als controlemiddel bij het cijferen werd gebruikt, is niet opgenomen in dit leerplan. Het inzicht dat hieraan ten gronde ligt, is veel te moeilijk voor de meeste leerlingen. Bedenk ook dat een negenproef geen zekerheid biedt omdat ze enkel de som van de cijfers controleert. Dit belet niet dat leerlingen die de negenproef willen gebruiken dit ook mogen doen maar de negenproef toepassen vormt geen doel meer voor alle leerlingen.

Daag leerlingen uit met bijvoorbeeld volgende probleemstellingen die ze met behulp van hun zakrekenmachine kunnen aanpakken:

- *Maak de volgende oefeningen.*
  Je mag cijferen of je zakrekenmachine gebruiken:
  453 x 9 = 211 x 9 = 9 123 x 9 = 4 587 x 9 =
  Maak telkens de som van de cijfers van de uitkomst.
  Herhaal dit tot je maar één cijfer meer overhebt.
  Je hebt altijd als som 9. Bijvoorbeeld voor 453 x 9 = 4 077
  doe je 4 + 0 + 7 + 7 = 18, 1 + 8 = 9
  Lukt dit altijd?

- *Kies vijf cijfers, bijvoorbeeld 8, 6, 4, 2 en 5.*
  Maak hiermee natuurlijke getallen.
  Deel die getallen door 9.
  Je vindt altijd dezelfde rest.
  Lukt dit ook als je door 3 deelt? Probeer maar ...

- *Kun je een kenmerk van deelbaarheid door 6 vinden?*
  (combinatie van deelbaarheid door 2 en 3)

- *Zoek een getal dat deelbaar is door 8, maar niet door 2 en 4.*
  (onmogelijk)

Veelvoud
G32

In de inleiding van deze rubriek las je reeds het belang van 'veelvouden' bij vlot hoofdrekenen en bij het omgaan met bewerkingen.

Eigenlijk hebben kinderen reeds heel vroeg notie van het begrip veelvoud waarbij de term zelf niet gebruikt wordt. Binnen de tafelproducten bijvoorbeeld, maar ook bij het sprongsgewijs tellen op de getallenas of gewoon bij "een aantal keer iets nemen".
Deze ervaringen vormen een basis om het begrip veelvoud in het 5e leerjaar te gaan gebruiken.

Een veelvoud van een getal is een getal waar dat getal een aantal keer ingaat.

45 is een veelvoud van 5 omdat 5 precies 9 keer in 45 gaat.

Gemeenschappelijke veelvouden
G32

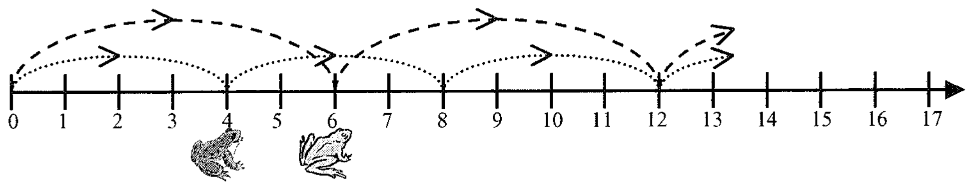
Het zoeken van gemeenschappelijke veelvouden (gv) wordt in dit leerplan beperkt tot getallen kleiner dan of gelijk aan 100 en verschillend van 0.

Het volstaat dat leerlingen enkele eenvoudige gemeenschappelijke veelvouden kunnen zoeken van **twee** getallen. Bouw een 'stopwaarde' in.

Zoek enkele getallen die zowel van 12 als van 8 een veelvoud zijn.
Zoek niet voorbij het getal 100.
gv(12,8) = 24, 48, 72, 96

Het zoeken van gemeenschappelijke veelvouden van drie of meer getallen kan wel eens voorkomen. Dan moet het echter gaan om eenvoudige getallen in een betekenisvolle situatie.

- *Twee kikkers 'springen paaltje'. De ene springt steeds 4 paaltjes ver, de andere telkens 6. Ze starten vanaf 'paaltje 0'. Op welke paaltjes komen ze samen terecht? Wat gebeurt er als een derde kikker mee springt vanaf het begin met sprongen van 10?*



- *In de winkel van Inge kan je balpennen kopen verpakt per vier of per vijf. Als er bijvoorbeeld 10 balpennen liggen, kan je twee pakjes van vier maken en heb je er twee over of kan je twee pakjes van vijf maken en heb je er geen over. Bij welke aantallen balpennen heb je geen losse over hoe je ook verpakt: per vier of per vijf?*

Kleinste gemeenschappelijk veelvoud
G32

Het kleinste getal van een rij gemeenschappelijke veelvouden is het kleinste gemeenschappelijk veelvoud. (kgv)

gv(12,8) = 24, 48, 72, 96, dus: kgv(12,8) = 24

De praktische situaties waar het kgv voorkomt zijn uiteraard dezelfde als deze waar de gv voorkomen.

Woensdag waren drie vrienden samen in het zwembad. De eerste, Tom, gaat om de vier dagen zwemmen. Gert gaat ook regelmatig zwemmen, maar om de zes dagen. En Koen laat er telkens acht dagen tussen. Het zwembad is elke dag open. Op welke dag zullen ze elkaar weerzien?

Geef hier enkele probleemstellingen die leerlingen laten nadenken over gv en kgv.

- *De zeef van Eratosthenes om de priemgetallen kleiner dan 100 te bepalen (zie blz. 59).*

- *Zoek een veelvoud van 45 dat geen veelvoud is van 9 maar wel een veelvoud is van 10 (onmogelijk omdat 45 zelf al een veelvoud van 9 is).*

- *Zoek alle gemeenschappelijke veelvouden van 23 en 92 kleiner dan 500 (dit zijn de veelvouden van 92).*

- *Waarom is het kgv(23,92) = 92? (92 is een veelvoud van 23)*

- *Raadspel. Welk getal heeft zich 'in mijn hoofd' verstopt?*

    - *Het is een deler van 24 en een veelvoud van 6 (6 of 12 of 24)*
    - *Het is een veelvoud van 13 en een deler van 26 (13 of 26).*
    - *Het is een gemeenschappelijk veelvoud van 12 en 16, en ligt tussen 100 en 200 (144).*

- *Het getal ligt tussen 20 en 30 en heeft precies 4 delers (21, 22 of 26).*

Nogal wat leerlingen zoeken het kgv van twee getallen door beide getallen met elkaar te vermenigvuldigen.
Een mogelijke werkwijze om dit te vermijden is:

- Ga na of het grootste getal een veelvoud is van het kleinste.

  kgv (20, 80) = 80, want 80 = 4 x 20

- Is dit niet het geval, som dan eerst de veelvouden van het grootste getal op. Ga bij elk veelvoud na of dit ook een veelvoud is van het kleinste getal.

  kgv (8, 60)
  60 is geen veelvoud van 8 maar 120 wel want ik kan 120 herstructureren in 80 + 40.

  Zo vermijd je dat leerlingen 8 x 60 = 480 als oplossing geven.

1.2.10 ANDERE TALSTELSELS

Verantwoording

Leerlingen beperkt confronteren met andere talstelsels zal hen meer bewust maken van de tientallige positionele opbouw van ons talstelsel.

Door de geschiedenis heen ontstonden twee soorten talstelsels.

Positionele getallensystemen

Eerst en vooral zijn er de positionele getallensystemen waarvan ons tientallig talstelsel een mooi voorbeeld is.

De tientalligheid van ons talstelsel is direct merkbaar. Zo krijg je de notatie voor "driehonderd vijfenveertig" door groepjes van tien te maken. De rest vormt het eerste cijfer links, dat van de eenheden namelijk '5'. Dan maak je groepen van tien van de groepen van tien, of groepen van honderd. De rest die je dan krijgt, vormt het cijfer voor de tientallen, namelijk '4'. In dit geval kan je niet meer verder groeperen per tien en drukt het laatste cijfer de groepen van honderd uit, namelijk '3'. Deze manier om hoeveelheden voor te stellen is zeer vertrouwd, maar eigenlijk is dit systeem niet zo eenvoudig.
Een sterk punt is dat je met een relatief klein aantal verschillende symbolen (van 0 tot 9) zeer grote hoeveelheden kan voorstellen waarbij het aantal symbolen toch beperkt blijft.

Met drie symbolen 1, 4 en 5 kan je 27 verschillende natuurlijke getallen maken:

111	*114*	*115*	*141*	*144*	*145*	*151*	*154*	*155*
411	*414*	*415*	*441*	*444*	*445*	*451*	*454*	*455*
511	*514*	*515*	*541*	*544*	*545*	*551*	*554*	*555*

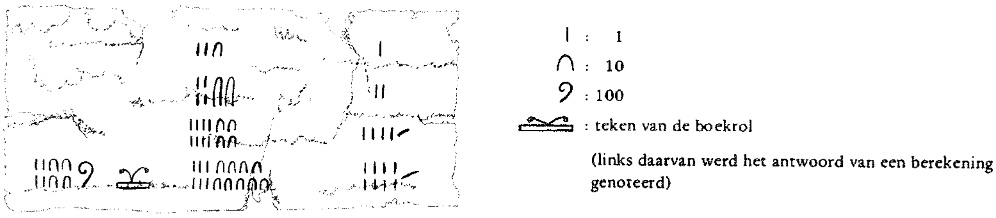
Maar dit groot voordeel vormt tevens een bron van fouten voor leerlingen die met deze positionele eigenschap worden geconfronteerd. Zo vormt bijvoorbeeld het omkeren van cijfersymbolen een veel voorkomende fout in de eerste graad juist omdat de plaats van de symbolen in een getalvoorstelling belang heeft.

Additieve getallensystemen

Daarnaast gebruikten heel wat culturen een additief (additioneel) getallensysteem.
In zo'n systeem wordt de getalwaarde die bij een zekere telbare hoeveelheid past, bepaald door de som van de symbolen te maken die deze hoeveelheid voorstelt.

Egyptisch getallensysteem
G34

Een kenmerkend voorbeeld van zo'n getallensysteem is het Egyptisch getallensysteem.



De Engelsman Rhind kocht in het Egyptische Luxor een rol papyrus die dateert van ongeveer 2000 voor Christus. In die papyrus treffen we de volgende berekening aan. Het gaat om een vermenigvuldiging. In het midden staan producten uit de tafel van 12 waarbij telkens verdubbeld wordt (12, 24, 48, 96, ...). De vermenigvuldiger werd rechts geschreven (1, 2, 4, 8, ...). Zo krijg je bijvoorbeeld 12 x 12 door de som te maken van 4 x 12 en 8 x 12. Dit werd met een schuin streepje aangeduid.
Merk op dat deze methode handig werkt. Denk aan 7 x 12. Het resultaat krijg je door de eerste drie producten samen te nemen.

Turven

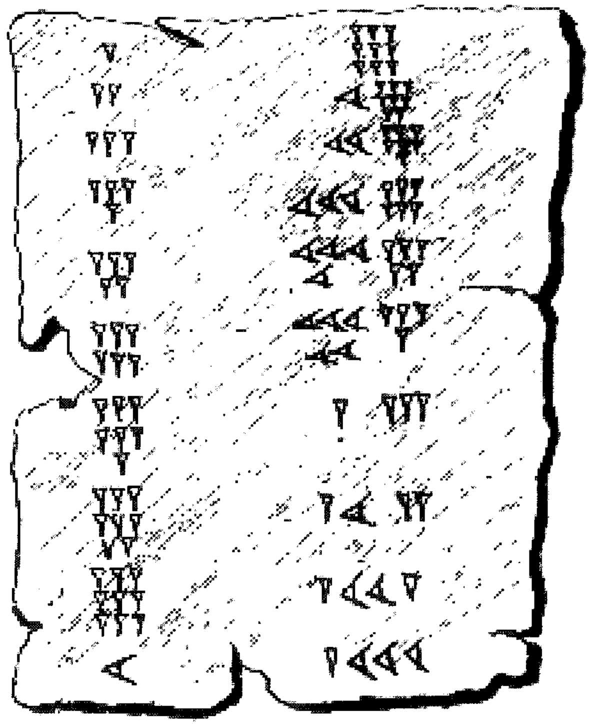
In de meest eenvoudige vorm vind je deze additionele aanpak ook bij 'turven' waarbij elk streepje één voorstelt en een eenvoudige groepeervorm wordt gehanteerd door vijf streepjes als een 'blokje vijf' te zien.

Babylonisch getallensysteem
G34

Deze additieve getallensystemen zijn eenvoudig in gebruik voor kleine hoeveelheden. Maak gewoon de som van de getalwaarden die achter de reeks symbolen schuil gaan en je kent de hoeveelheid waar de reeks symbolen naar verwijst. Grote getallen kunnen wel problemen geven want de hoeveelheid symbolen wordt onoverzichtelijk. Zo wordt bijvoorbeeld '897' in ons talstelsel voorgesteld door drie symbolen terwijl dit in het Egyptisch getallensysteem een reeks van 24 (= 8 + 9 + 7) symbolen telt.
Zuiver additionele getallensystemen vind je dan ook weinig. Meestal ontstonden getallensystemen die de additieve eigenschap combineerden met een positionele eigenschap.

Het Babylonisch getallensysteem werd door de Sumeriërs gebruikt die ongeveer 5000 jaar geleden leefden in de streek rond Babylon. Kenmerkend zijn de bekende kleitabletten met spijkerschrift.

Getallen werden ook in dit spijkerschrift voorgesteld.
Bekijk het onderstaand 'kleitablet' waar de tafel van negen op afgebeeld staat. Links staan de cijfers van 1 tot 10 en rechts de tafelproducten.



Wat zijn de kenmerken van dit systeem?

- *Een verticale 'kras' is één.*
- *Een horizontale kras is tien. Bij 63 merk je iets bijzonders. De verticale spijker duidt de hoeveelheid zestig aan.*
- *Het systeem is zestigtallig: zo wordt zestig voorgesteld door een verticale kras met een lege plaats ernaast (vergelijk met de schrijfwijze van tien in ons tientallig talstelsel).*

Dit getallensysteem is dus zowel positioneel als additief. Zo wordt de getalwaarde bepaald door de som van de symbolen te maken, maar de plaats van een groepje symbolen kan wijzen op een groep van 60 of 60 x 60, of ...

Tientallig	**Babylonisch**
1	𒁹
60	𒁹
2	𒁹𒁹
61	𒁹 𒁹
70	𒁹𒌋
3610	𒁹 𒌋
...	

Hindo-Arabisch getallensysteem

Het getal dat met deze voorstelling correspondeert, is niet nauwkeurig bepaald. Uit de context moest blijken of het hier ging over 12 (1 keer 10 en 2 keer 1), of over 602 (10 keer 60 en 2 keer 1), of over 36 061 (10 keer 3600 en 1 keer 60 en 1 keer 1), of...

Als je een symbool voor 'niets' hebt dan kan je de lege plaatsen aanduiden en krijg je geen verwarring meer zoals in bovenstaand voorbeeld.

De eer voor het uitvinden van ons positiestelsel samen met het getal 0 komt toe aan Hindoewiskundigen die omstreeks het jaar 200 onze getallennotatie ontwikkelden waarbij een kringetje een lege plaats moest aanduiden.

In onze gewesten was het rekenen met de abacus met Romeinse cijfers sterk ingeburgerd zodat het duurde tot begin van de 13e eeuw voor de 'abacisten' het moesten afleggen tegen de voorstanders van het positioneel tientallig getallensysteem ('algoritmici').

Het Romeins talstelsel
G33

Het Romeins talstelsel is zoals het Babylonisch talstelsel ook een voorbeeld van een additief talstelsel met positionele trekken.

Om natuurlijke getallen in het Romeins cijfer te schrijven gelden volgende afspraken:

- bij de omzetting van een getal wordt elk cijfer in dalende rangorde omgezet;

  799 = 700 + 90+9 = DCCXCIX
  niet: 799 = 700 + 99 = DCCIC

- de waarde van alle symbolen wordt opgeteld;
- de symbolen M, C, X, I worden ten hoogste drie keer na elkaar gebruikt;
- de symbolen D, L, V komen nooit meer dan één keer onmiddellijk na elkaar voor;
- de aftrekregel: als een symbool van lagere waarde zich links van een symbool van hogere waarde bevindt, dan wordt de lagere waarde van de hogere waarde afgetrokken; de aftrekregel geldt enkel tussen de symbolen C en M, C en D, X en C, X en L, I en X, I en V.

Opmerkingen

Op klokken vinden we soms de oude notatie IIII in plaats van IV. Het is nuttig om de kinderen er op te wijzen dat de notatie door de eeuwen heen niet steeds dezelfde is geweest.

Romeinse cijfers worden vaak tussen twee horizontale strepen genoteerd. Dit was in oude boeken een hulpmiddel om het onderscheid te kunnen maken tussen een woord en een getal in de tekst.

Binnen betekenisvolle situaties in het vooral zinvol dat leerlingen een Romeins getal kunnen lezen. Beperk de getalgrootte die leerlingen zelf omzetten tot het huidige jaartal.

1.2.11 GETALLEN SCHATTEN EN AFRONDEN

Het is belangrijk dat kinderen getallen leren schatten en afronden. Daarom besteedt het leerplan er uitdrukkelijk aandacht aan. Niet alleen bij getallenkennis maar ook bij de andere leerdomeinen.

B36, B37, B53a, B53b MR13, MR20, MR25, MR79

Zo vormt dit schatten en afronden van getallen een noodzakelijke basis als je met leerlingen tot schattend rekenen wilt komen.
Daarnaast komen aspecten van schatten en afronden aan bod ondermeer om verhoudingen te bepalen en bij meetprocessen in meten en metend rekenen

Schatten

Schatten is niet zomaar gissen en missen. Bij gissen en missen 'in het wilde weg' ontbreekt de redenering die tot de gekozen benadering leidt.

Neem het getal 1,98.

- *In de winkel mag je 1,98 euro afronden naar 2 euro als je wilt nagaan of je wel genoeg geld op zak hebt.*
- *De winkelier tikt of scant '1,98 euro' precies in op zijn winkelcomputer die je kassaticket drukt en ook de inkomsten van de dag bijhoudt.*

Schatten is ook niet precies bepalen. Er is dan geen ruimte om te benaderen of af te ronden. De relatieve grootte van een getal of de situatie waar het getal gebruikt wordt, komt hier niet ter sprake.

Schatten staat eigenlijk tussen deze twee uitersten, tussen 'het rekenkundig exacte' en het 'raden'.

In het dagelijks leven komt dit schatten veel voor, meestal in situaties waar een benaderende uitkomst voldoende is.

Heb ik wel voldoende geld bij om twee broden en vijf koffiekoeken te kopen?
Een exacte berekening hoeft niet in deze situatie.

Er zijn ook situaties waar de gegevens zelf ontbreken of slechts benaderend kunnen bepaald worden.

Bij de uitgave van een boek schat de uitgever het verkoopcijfer. Hier ken je geen gegevens of slechts benaderende gegevens. Zo kan het verkoopcijfer van een vorig boek van de auteur een benaderend gegeven vormen.

Schatten is meestal zinvoller dan een exacte benadering.

"Ik woon precies 5 103 m van de school." Hier is het zinvoller te zeggen: "Ik woon ongeveer (of ruim) 5 km van de school."

Hiermee zijn een aantal redenen opgesomd waarom schatten in het huidige leerplan een belangrijk accent vormt.

Getallen situeren in de buurt van
G35

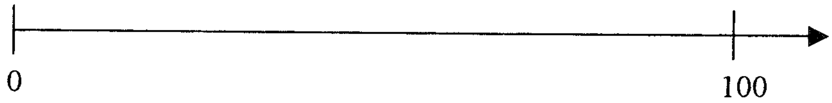
De relatieve grootte van getallen inschatten is niet zo eenvoudig. Dit inschatten begint met het situeren van getallen 'in de buurt van'. Heb ook aandacht voor andere termen als 'ver af', 'veel kleiner dan', 'niet in de buurt van'... Zo ontstaat een uitgebreid arsenaal termen dat leerlingen in staat stelt om getallen te situeren in relatie met andere getallen die al of niet in de buurt van het gegeven getal liggen.

Als je een getal situeert ten opzichte van andere getallen dan zijn die andere getallen meestal 'eenvoudiger' getallen of zeker getallen die door de leerlingen als 'eenvoudiger' worden aangevoeld.

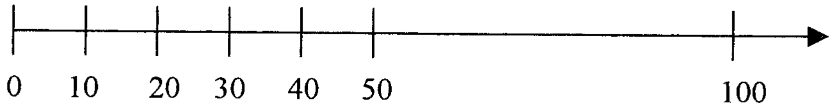
- *17 ligt tussen 10 en 20, maar iets dichter bij 20 en ver van 100 op de getallenas.*
- *89 is ongeveer 90, ligt niet zo ver van 100 maar ligt ver van 8 en 9*
- *8 789 ligt niet in de omgeving van 870 maar wel in de buurt van 8 700 en nog dichter in de buurt van 8 800*

Een belangrijk hulpmiddel bij dit schattend situeren kan de getallenas zijn. Je kan die getallenas aanbieden met onderverdelingen, maar ook zonder onderverdelingen ('lege getallenas' genoemd). Dit heeft als bijkomend voordeel dat de leerlingen van in het begin schattend moeten te werk gaan.

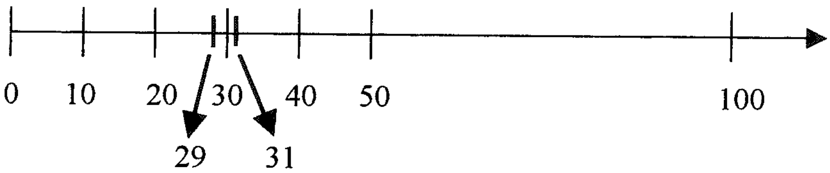
Waar staan 31 en 29 op volgende getallenas?



"Ik zet eerst 50 op de getallenas. Nadien de tientallen tot 50:



"Nu plaats ik 31 en 29."



Zowel 31 als 29 liggen dicht bij 30 en ze liggen maar 2 plaatsen van elkaar.

Naast het situeren van een getal speelt bij het schatten en afronden de relatieve grootte van dit getal ook een rol.

Relatieve grootte van getallen

Die relatieve grootte is situatiegebonden. Zo kan je getallen situeren op de getallenas (zie hiervoor) zonder rekening te houden met de situatie waarin die getallen worden gebruikt. Met de relatieve grootte lukt dit niet.

- *Leerlingen mogen geen 12 snoepjes voor zichzelf meebrengen, dat is veel te veel. 12 leerlingen in een klas is weinig.*

- *10 000 inwoners is veel voor een plattelandsgemeente, maar weinig voor een stadsbevolking.*

- *30 fr. is weinig, maar 30 euro kan veel zijn.*

Getallen afronden wiskundig bekeken
G36

Afronden is gebonden aan enkele regels. In dit verband spreekt men over 'de graad van nauwkeurigheid'.

De graad van nauwkeurigheid

Bij elke graad van nauwkeurigheid die wordt gevraagd, geldt dezelfde regel: het cijfer dat in het getalbeeld direct rechts staat van de kolom die met de gevraagde graad van nauwkeurigheid overeenkomt, bepaalt of je naar boven of naar onder afrondt.

Neem de getallen 153,9 en 865,1

- *Rond af tot 1 nauwkeurig.*
  Hier bepaalt het cijfer van de tienden of er naar boven of naar onder wordt afgerond. Is het cijfer 0, 1, 2, 3 of 4 dan rond je af naar beneden. Is het cijfer van de tienden 5, 6, 7, 8, of 9 dan rond je af naar boven.
  Dus: 153,9 → 154
  865,1 → 865

- *Rond af tot 10 nauwkeurig.*
  Als je op 10 nauwkeurig wilt afronden, bepaalt het cijfer van de eenheden of je naar boven of naar onder moet afronden.
  Dus: 153,9 → 150
  865,1 → 870

- *Rond af tot 100 nauwkeurig.*
  Het cijfer van de tientallen bepaalt nu de afronding.
  Dus: 153,9 → 200
  865,1 → 900

Deze puur wiskundige benadering van afronden pas je toe bij cijferen om de nauwkeurigheid van het quotiënt bij delingen te bepalen.

G36

Om getallen op een zinvolle manier af te ronden en ze te benaderen door 'eenvoudiger' getallen die makkelijker te interpreteren zijn, speelt de situatie waarin deze getallen voorkomen een grote rol.
Zo kan die situatie er zelfs voor zorgen dat de net besproken wiskundige manier van afronden moeilijk of zelfs niet toepasbaar is.

- *"Nog 9 weken naar school en dan begint de vakantie."*
  Niemand zal het raar vinden als je zegt: "Nog 10 weken ongeveer en dan begint de vakantie." De benadering van 9 door 10 kan in deze situatie zinvol zijn.

- *"Dat programma begint om 9 uur." De benadering van 9 door 10 is hier zinloos, zeker als je het programma wilt zien.*

- *49 is iets minder dan 50 ... is meer dan 40*
  Als je 49 personen moet vervoeren, kan dat met een bus van 50.
  Hier benader je 49 door het 'gemakkelijker' aanleunend getal 50.

Als je 49 personen uitnodigt, is het waarschijnlijk voldoende als je een ruimte hebt waar een veertigtal stoelen staan. De benadering van 49 door het kleinere getal 40 kan hier aangewezen zijn.

- *1 021 is wat meer dan 1 000 ... is iets meer dan 1 020*
  Als het over het aantal bladzijden van een dik boek gaat, mag je afronden naar 1 000. Maar als dit getal op je kasticket staat, kan het gebeuren dat de winkelier dit bedrag afrondt naar 1 020. "Laat die ene frank maar zitten, 1 020 is goed."

- *Neem de opgave 150 : 7=*
  Met je zakrekenmachine bereken je het quotiënt
  150 : 7 = 21,428 571 42
  De interpretatie van die uitkomst en de manier waarop je die uitkomst afrondt, hangen nauw samen en zijn niet te scheiden.
  - *Er komen 150 personen naar de voordracht van morgenavond. Hoeveel tafels moet het personeel van de zaal klaarzetten? Rond elke tafel kunnen maximaal 7 stoelen.*
    De wiskundige afronding tot op 1 nauwkeurig is hier 21, terwijl het antwoord 22 moet zijn.
  - *Je hebt 150 euro betaald voor 7 klapstoeltjes. Hoeveel kost één stoeltje?*
    De afronding tot op 0,01 nauwkeurig gebeurt door te delen tot op 0,001 en het quotiënt af te ronden tot twee cijfers na de komma. Deze wiskundige benadering (21,429) rond je af naar 21,43.
  - *De leerlingen van de bovenbouw staan in rijen van zeven. Er zijn precies 150 leerlingen. Hoeveel volledige rijen kan je maken?*
    De wiskundige benadering van de uitkomst tot op 1 nauwkeurig komt hier overeen met de oplossing: 21.

- *In een klas van 26 kinderen zitten 9 jongens. Dat is ongeveer 1 op 3. Er zijn dus ongeveer dubbel zoveel meisjes als jongens in deze klas (afronden bij breuken, kansberekening...).*

- *De klas is ongeveer 8 meter lang. Maatgetallen van meetresultaten zijn vaak het resultaat van een afronding.*

- *Hoeveel percent haalde een bepaalde partij bij de verkiezingen? Dit is afronden van gegevens als verkiezingsuitslagen, in tabellen...*

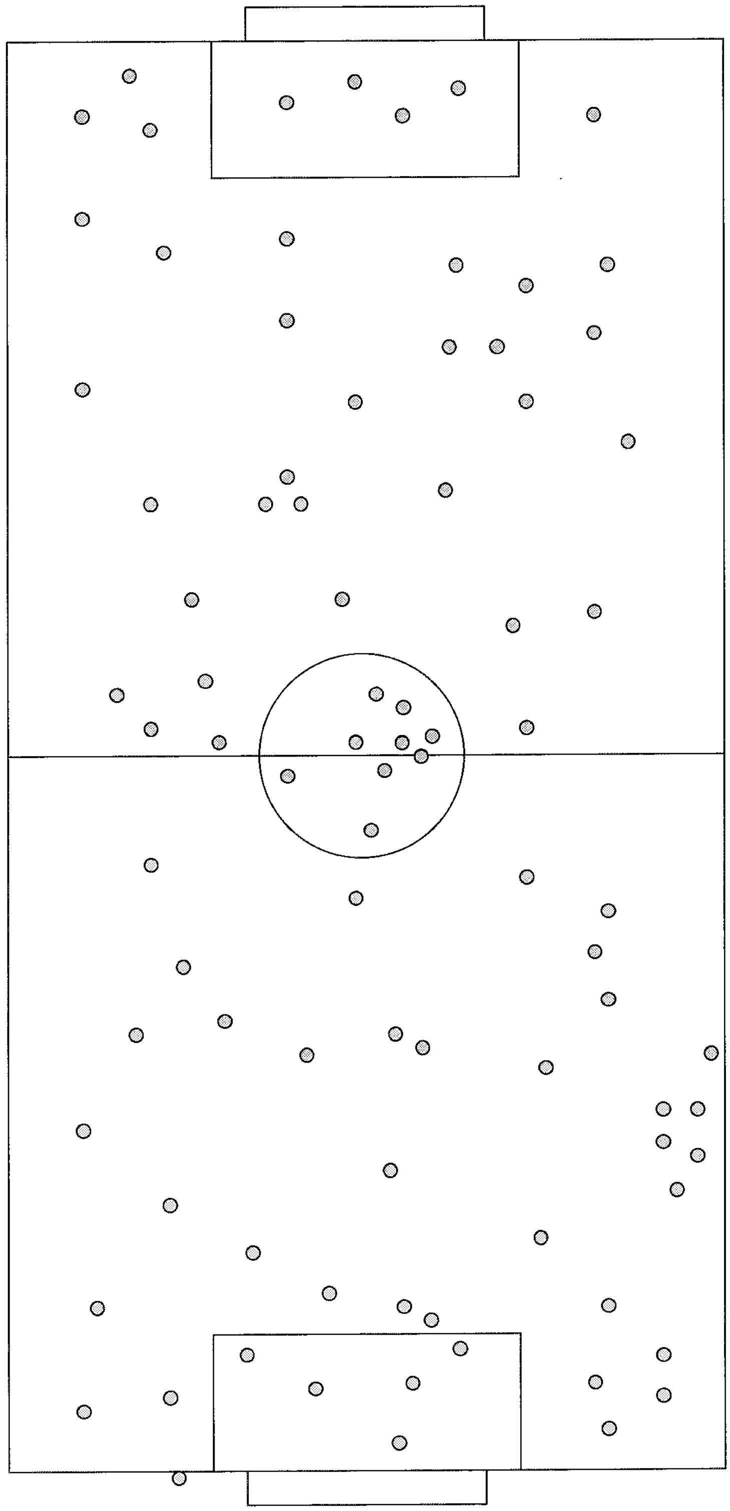
- *Op deze plaats passeren ongeveer 700 wagens per uur. De rijkswacht telt de auto's die gedurende een uur op een bepaalde plaats passeren. Het aantal is exact gekend. In de mededelingen hieromtrent worden de resultaten vaak afgerond.*

1.2.12 TOEPASSINGEN

G37

Om hoeveelheden handig te tellen en vooral om grote hoeveelheden te tellen gebruik je intuïtief een aantal 'vaardige' aanpakken. Zo zijn turven of het aanbrengen van een zekere structuur handige middelen om grote hoeveelheden te tellen.

Hoeveel ballen liggen er op het voetbalveld?
Werk per twee en zoek hoe je dit zo vlug mogelijk kunt oplossen.



Bespreek de verschillende aanpakken:

G4

- *Bart en Gunter: "Wij hebben gewoon geteld, maar dat was niet gemakkelijk omdat we niet goed wisten welke ballen we reeds geteld hadden. Daarom zijn we herbegonnen en hebben we elke bal doorstreept die we al geteld hadden."*

G37a

- *Mohammed en Sien: "Wij hebben een blad genomen. Terwijl Sien een bal doorstreepte, heb ik een streepje op het blad gezet."*

G37b

- *Tamara en Joeri: "Joeri trok telkens een kring rond vijf ballen. Dan telden we de kringen en de ballen die nog over waren."*

G37c

Het kan echter gebeuren dat een hoeveelheid niet of moeilijk exact te bepalen is maar dat je toch een zekere schatting wilt maken van het aantal. Dan wordt het meestal zoeken naar een handige procedure om dit aantal zo goed mogelijk te benaderen.

Hoe tel je het aantal deelnemers aan een betoging?
Hierbij kan je vertrekken van het aantal rijen dat je bij een bepaald punt passeert of je kan het aantal bussen tellen waarmee de deelnemers gekomen zijn.

G37a

Ongeordende hoeveelheden handig tellen door te turven is een veelgebruikte telwijze. Turven brengt een eenvoudige ordening aan die de hoeveelheid overzichtelijk en makkelijker telbaar maakt.

Turven gebruik je niet alleen om een beter overzicht van een aantal te krijgen bij ongeordende of grote hoeveelheden maar is ook handig als je dingen telt over een lange tijdsperiode.

De meester zet een streepje op een namenlijst van de klas naast de naam van een leerling als hij zijn huiswerk heeft afgegeven. Zo merkt de meester direct dat drie leerlingen nog één huistaak moeten maken en één leerling zelfs twee.

De manier waarop je turft, kan verschillen. Je kunt twee aanpakken onderscheiden.

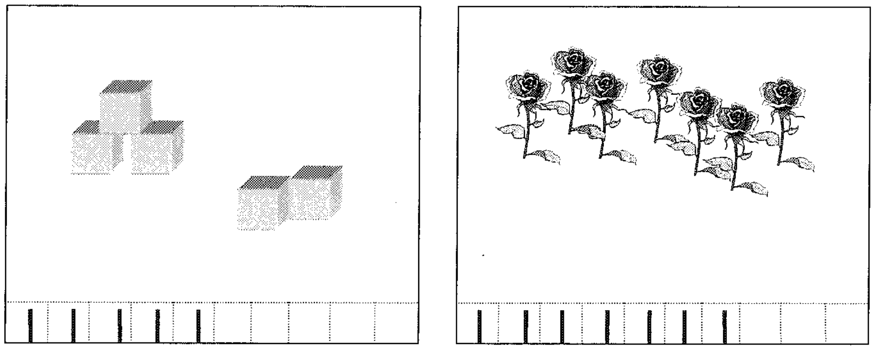
- Je zet gewoon streepjes en je telt ze achteraf.
  Kinderen gebruiken deze meest eenvoudige vorm van turven in spelsituaties.

  Jan, Lieve en Anouk hebben verschillende keren een gezelschapsspel gespeeld. Wie won kreeg één streepje. Wie is de grote winnaar?

Jan	Lieve	Anouk
I I I I	IIIIIII	IIIII

Je kan in een eerste leerjaar twee hoeveelheden laten vergelijken door leerlingen een vergelijkingsstrook bij het turven aan te bieden.

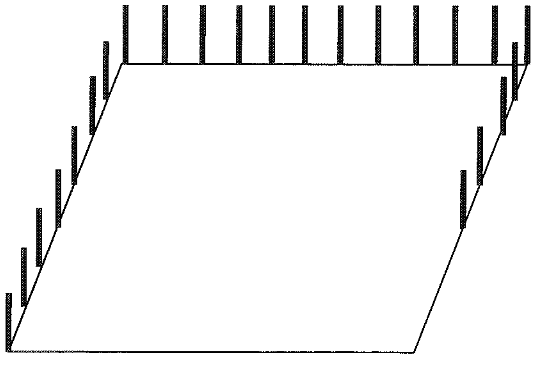
Zijn er meer bloemen of zijn er meer blokken?



- Je zet streepjes in groepjes.
  Dit is de meest gangbare manier van turven. In de te tellen hoeveelheid breng je een soort structuur aan, meestal een groepering per vijf.
  Deze structurering helpt aanzienlijk om het aantal gemakkelijk te overzien. Het aantal groepjes van vijf vormt samen met de overblijvende streepjes het getal dat bij de hoeveelheid past. Soms zie je dat die groepjes van vijf ook nog eens per twee worden gegroepeerd. Zo ontstaan groepjes van tien wat bij grote hoeveelheden handig kan zijn

  - *De klas heeft een enquête voor de hele lagere school opgesteld. De resultaten worden eerst geturfd, voor ze verder verwerkt worden.*

  - *Boer Jan maakt een omheining. Hij heeft een machine gehuurd die de palen in de grond slaat. Dochter Elke staat erbij en turft het aantal palen.*
    Hoeveel palen zitten er al in de grond?



Om het aantal te bepalen kan je nu zowel per vijf of per tien groeperend tellen.

G37b

Het aanbrengen van een structuur binnen de hoeveelheid die je wilt tellen, is een handige manier om vat te krijgen op het aantal dat bij die hoeveelheid past.

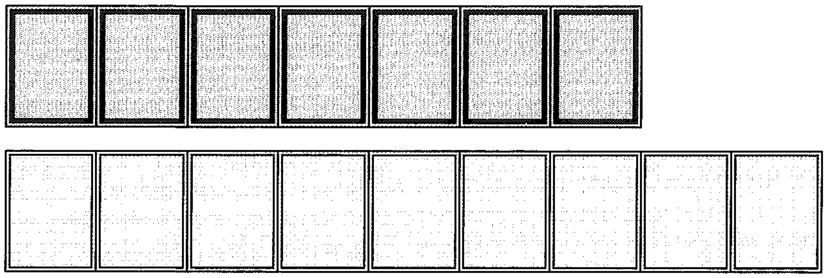
Dit structureren kan je niet zomaar opleggen. Het is integendeel een verrijking voor kinderen om verschillende aanpakken te ontdekken of te verkennen.

Enkele mogelijkheden.

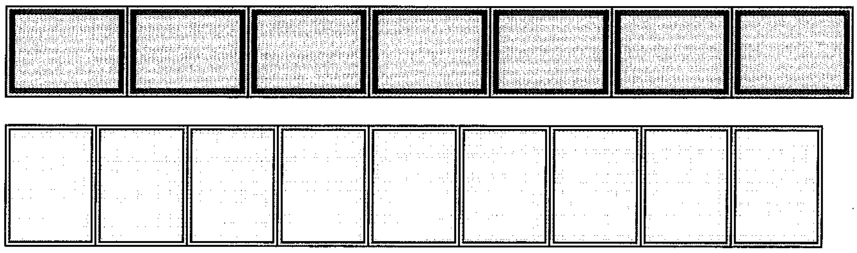
G4

- Om twee hoeveelheden te vergelijken kan het handig zijn om elke hoeveelheid te structureren op een rij en om beide rijen te laten corresponderen.

  Ali legt de rode en de groene kaartjes.



  "Ik heb 2 groene kaartjes meer, dat zie je zo. Eerst had ik ze zo gelegd."

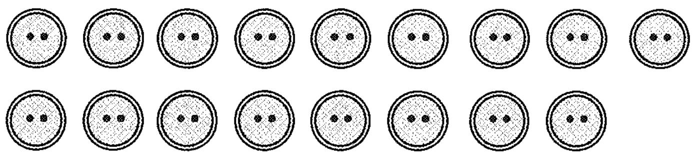


  "Maar dan kan je niet zo goed zien dat er 2 groene kaartjes meer zijn. Ik dacht zelfs dat er meer rode waren."

G39

- Een hoeveelheid leggen in rijen per twee (of drie of ...) is een vorm van structureren die het bepalen van het aantal zeker eenvoudiger maakt.

  Kim legt de knopen uit de doos per twee.



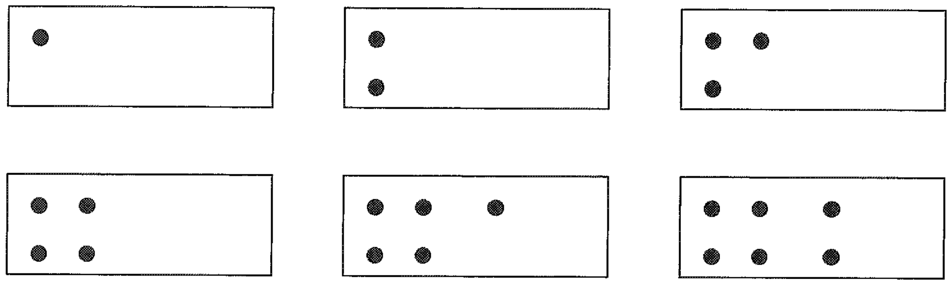
  "Er zijn 17 knopen, want ik tel 8 keer twee knopen en één knoop alleen."

Rechthoekig patroon

Deze manier van structureren komt overeen met een rechthoekig patroon.

Kwadraatbeeld

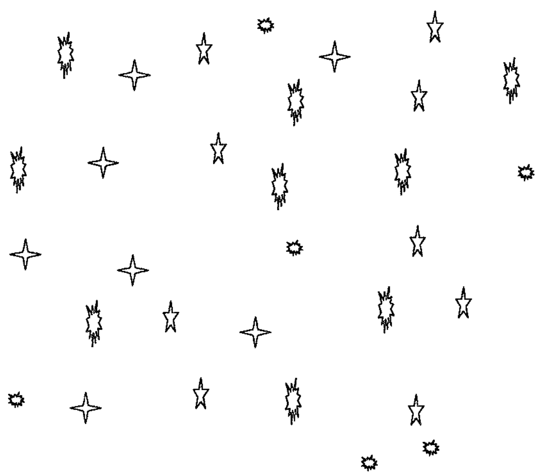
Een toepassing van zo'n rechthoekig patroon vind je terug in het veel gebruikte kwadraatbeeld. Kinderen zijn in staat om vlug een niet te grote hoeveelheid globaal te herkennen met zo'n getalbeeld.



G10

Binnen een hoeveelheid kan je ook groepjes maken. Dit groeperen per twee, drie, vier, ... vereenvoudigt het tellen van de hoeveelheid maar draagt weinig bij tot inzicht in de tientalligheid van ons plaatswaardesysteem. Groeperen per tien daarentegen ondersteunt dit inzicht wel.

Lena maakt groepjes per vijf sterren om een 'groot' aantal sterren op een blad te tellen.



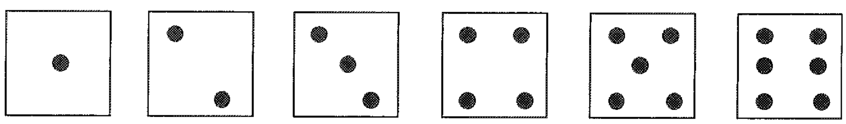
"Zes groepen met vijf sterren en één ster over, dat zijn er 31."

Getalbeelden

Om getallen zo voor te stellen dat ze gemakkelijk globaal herkend worden, vormen getalbeelden een dankbaar didactisch hulpmiddel in de basisschool. De reeds vermelde kwadraatbeelden zijn gebaseerd op een rechthoekige schikking van elementen.

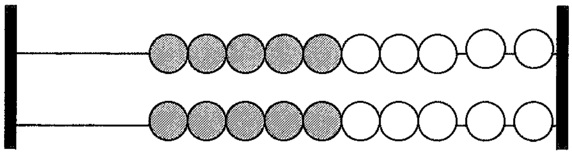
Dominobeeld

Een andere schikking vormen de getalbeelden zoals je ze kan zien op een dominosteen, het zogenaamde dominobeeld.



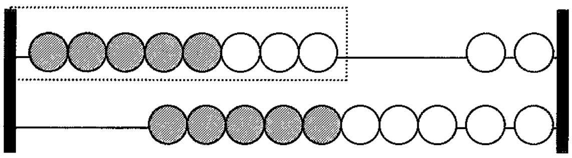
Rekenstaven
Telramen
Rekenrek

Rekenmaterialen als rekenstaven en telramen zijn gebaseerd op een lineaire schikking van de hoeveelheden. Bij telramen vind je naast groeperingen per tien ook groeperingen per vijf.
Denk hier aan het rekenrek dat soms in de eerste graad wordt gebruikt.

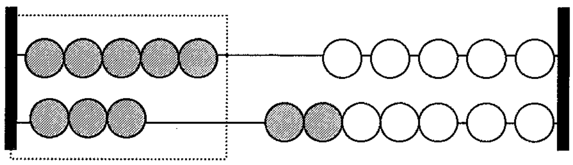


Met het rekenrek kun je de hoeveelheid 8 op verschillende manieren voorstellen.

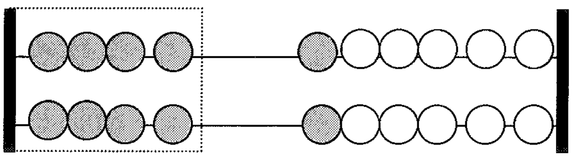
- Met een 'heel' vijfbeeld



- Met een 'gebroken' vijfbeeld

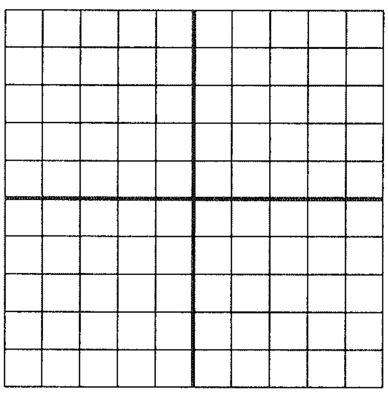


- Met een dubbelbeeld



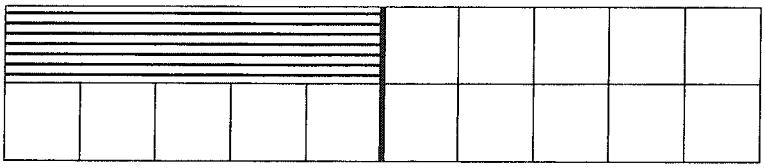
Honderdveld

Het honderdveld heeft een structuur die zowel lineair als vierkant is. De rijen van tien zijn lineair opgebouwd in de horizontale richting en vormen samen honderd.
Start met 1 in de linkerbovenhoek en niet met 0.



Twintigveld

Het honderdveld kan in een eerste leerjaar aangezet worden met een twintigveld. Hiervoor gebruik je de eerste twee rijen van het honderdveld.
Op de volgende tekening kan je zien hoe een kind '5' heeft aangeduid.



G37c

Hoeveelheden zijn niet altijd precies te tellen.
Soms moet je zoeken naar benaderende telmethodes, schatprocedures genoemd, om deze hoeveelheden te benaderen.

Hoe kunnen we het aantal auto's bepalen dat elke dag aan de school passeert?
- *Met een automatische teller kan je dit aantal gedurende twee dagen precies registreren.*
  Maandag was dit 1 501 en dinsdag was dit 1 196.
- *Kies een vijftal momenten van tien minuten waarbinnen je alle auto's telt. Met deze gegevens kom je tot een globale schatting.*

G35

In dit voorbeeld benader je het aantal op twee manieren.

G36

Eerst is er de exacte benadering: de 'automatische teller' geeft na een dag een precies getal. Merk hierbij op dat je dit aantal moet relativeren en afronden. Zo is het antwoord niet 1 501 of 1 196 maar ergens in de buurt van beide getallen. Het is immers duidelijk dat niet elke dag evenveel auto's aan de poort passeren.

Schatprocedure

De tweede benadering is een mogelijke schatprocedure indien je niet over de mogelijkheden beschikt om exact te tellen. Uiteraard zijn er hier veel mogelijke benaderingen en hangt het van je eigen inventiviteit en die van de leerlingen af welke procedures je hier allemaal krijgt.
Bij elke procedure kan je enkele kanttekeningen maken. Zo is het duidelijk dat de werkwijze die hier wordt geschetst niet zo eenvoudig is en problemen kan oproepen:

- *Is een vijftal momenten van tien minuten voldoende of vind je dit te veel?*
- *Kiezen we die momenten lukraak?*
  Denk aan: drukke en minder drukke momenten, avond en nacht, ochtend- en avondspits, verkeer rond de middag, enz.
- *Wat doe je met het resultaat? Hoe interpreteer je de uitkomst?*

Het zoeken naar en nadenken over schatprocedures om moeilijk te bepalen gegevens te tellen zijn boeiende activiteiten voor leerlingen. Deze telactiviteiten situeren zich op een hoger niveau in vergelijking met het gewone resultatief tellen.

Nog enkele probleemstellingen met mogelijke oplossingswijzen:

- *Hoeveel woorden staan er in het boek van ...?*
  Tel niet alle woorden. Neem een willekeurige bladzijde. Tel het aantal regels en het aantal woorden van één willekeurige (maar 'representatieve') regel. Het product hiervan vermenigvuldig je met het aantal beschreven bladzijden van het boek.

- *Hoeveel bloemen staan er in die weide?*
  Je kan een beperkt deel afbakenen en daar de bloemen tellen. Dan bepaal je hoeveel keer groter de weide is en hoeveel bloemen er in die weide staan. Hier ondersteunt de meetkundige voorstelling (rechthoekmodel) en een tekening de schatprocedure.

- *Hoe tellen sterrenkundigen het aantal sterren?*
  Sterrenkundigen verdelen de hemel in vierkanten en gaan op dezelfde wijze veralgemenen als bij de 'bloemetjes in de wei.'

- *Hoeveel rode zuurtjes zitten in 1 kg gemengde snoep?*
  Weeg 100 g of 50 g en tel het aantal rode zuurtjes. Vermenigvuldig dit aantal met 10 of 20.

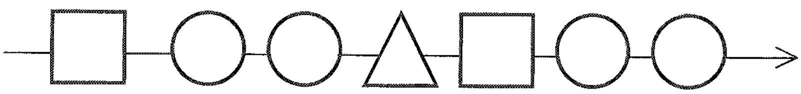
- *Hoeveel pingpongballetjes kunnen er in onze klas?*
  We vullen een doos.

Rijen maken
G38

Kinderen moeten oog krijgen voor overeenkomsten en verschillen bij voorwerpen die op een rij gelegd zijn.

Zo kunnen kinderen aanvankelijk experimenteren met kralen rijgen waarna ze een rij kralen moeten maken volgens een afgesproken patroon.

Leg volgens het patroon: drie rode, twee gele, één blauw, drie rode, twee gele, één blauw, ...
Zet het patroon verder:



MK2

Het herkennen en zelf opstellen van zo'n patroon leunt sterk aan bij meetkunde en wordt daar eveneens vermeld samen met de verwoordingen: eerste, tweede, middelste, enz.

Rijen met getallen

Naast de meer meetkundige rijen die je vindt bij onder meer kralen rijgen en het maken van versieringen zijn er ook rijen getallen die opgebouwd worden met behulp van een getallenpatroon.

Zet de rij van getallen voort:
1 - 2 - 3 - .
2 - 4 - 2 - 4 - .
1 - 2 - 3 - 2 - 1 - .
0 - 2 - 4 - .
2 - 3 - 5 - 8 - .
1 - 2 - 4 - 8 - .
2 - 4 - 7 - 11 - .

Laat leerlingen voldoende tijd om het patroon van de rij te vinden. Meestal ligt het patroon van de rij vast maar soms is het mogelijk om variaties te bedenken. Stimuleer daarom leerlingen om verschillende oplossingen te bedenken waar dit mogelijk is

Bij de rij 1 - 2 - 3 - . is het mogelijk om te variëren:
- *Tuur: "1 - 2 - 3 - 4 - 5 - 6, ... want altijd één meer."*
- *Jessica: "1 - 2 - 3 - 3 - 2 - 1 - 1 - 2 - 3, ... eerst tot 3 en dan naar 'beneden'."*
- *Karim: "1 - 2 - 3 - 1 - 2 - 3 - 1 - 2 - 3 ..., zo tel ik soms!"*

Maar bij een rij als 2 - 4 - 2 - 4 - . is het niet mogelijk om een variatie te bedenken. Door het patroon twee keer te herhalen is er maar één oplossing mogelijk.

Varieer de aanbiedingsvorm.

- Bedenk rijen die 'doodgaan'.

  Juf Marleen schrijft aan het bord: 8 - 7 - 6 - .
  "Wat zou het volgende getal kunnen zijn?"
  Lisa heeft het door: "Altijd één minder 5 - 4 - 3 - 2 - 1 - 0 . Deze rij loopt dood, juf!"
  Bram zit al een poos ernstig te kijken: "Ah neen, we beginnen weer opnieuw met 1 - 2 - 3 - 4 ..., altijd op tot 8 en dan neer tot 0."
  "Wie bedenkt nog zo'n rij?"
  Aaike: "6 - 3 - 0"

- Vul de 'gaten' in een rij. Eerst moet je het passend getalpatroon vinden en dan kan je aan de slag.

  Vul de gaten op:
  50 - . - 30 - 20 - .
  2 - . - 8 - . - 14 - .
  400 - 180 - . - 15 (patroon: 'vorig getal delen door twee en dan verminderen met twintig')
  2 - 2 - 4 - 6 - 10 - . - 26 - .

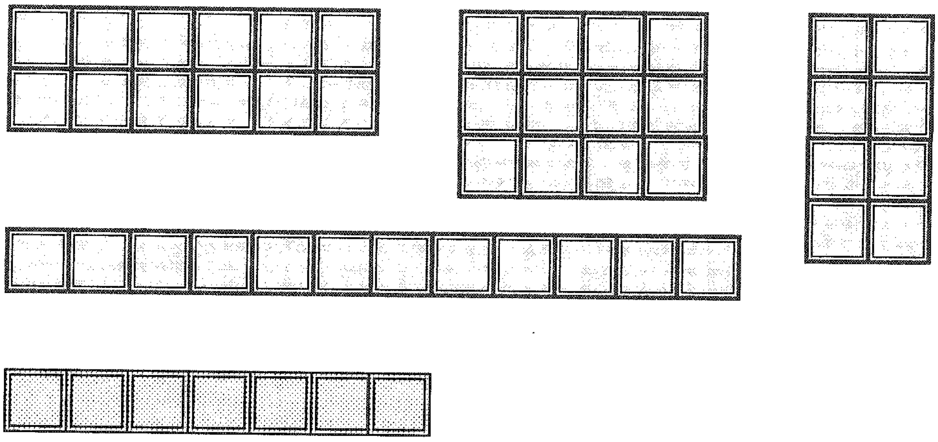
- Neem een rij waarvan je het getalpatroon kent.
  Maak een gelijkaardige rij waarvan je het 'eindpunt' kent.

  De rij 2 - 2 - 4 - 6 - 10 - . heeft als patroon: "begin met twee getallen en maak telkens de som."
  Maak nu een rij van 5 getallen die eindigt op het getal 50.
  . - . - . - . - 50
  Probeer verschillende rijen te vinden.

Zulke denkoefeningen met rijen leggen een basis voor het latere rekenwerk en zeker voor hoofdrekenen.

G39 Als mensen getallen gebruiken in alle mogelijke situaties worden orde, regelmaat, verbanden, patronen en structuren tussen en met getallen ontdekt en toegepast.

De meesten van ons voelen bijvoorbeeld het getal 12 als een 'rijker' getal aan dan 7. Zo kan je 12 flessen mooier rangschikken in een rechthoekpatroon en dan nog op veel verschillende manieren en lukt dit met 7 niet.



G38

- *In de meeste straten is de regelmaat van de huisnummers te herleiden tot een rij getallen waarvan het verschil tussen twee opeenvolgende getallen altijd 2 is.*

- *De structuur van postnummers is daarentegen streekgebonden. Zo weet je dat een postnummer dat begint met een 9 verwijst naar de streek van Gent.*

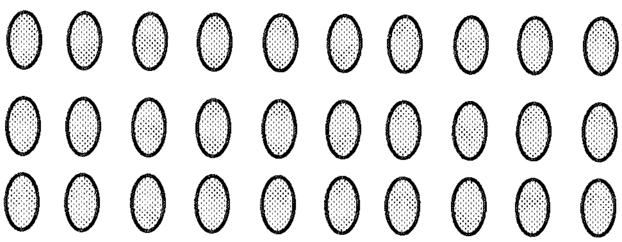
In het rekenwerk van leerlingen komt het dikwijls voor dat kinderen verbanden en patronen tussen en met getallen zelf ontdekken. Je kan als leerkracht natuurlijk tips geven om bepaalde eigenschappen te vinden.

G6

- *Kim maakt op het honderdveld sprongen van 10 vanaf 3. Ze stelt vast dat de getallen altijd op een 3 eindigen.*

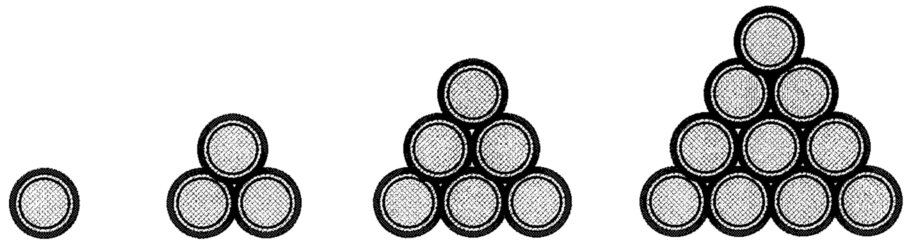
- *Tania ontdekt het volgende: "1 meer dan 7 is 8, 1 meer dan 17 is 18, 1 meer dan 27 is 28, 1 meer dan 37 is dus ..."*

- *De tafel van drie kan je voorstellen als:*



- *Welke getallen kan je maken door telkens het volgende getal bij te tellen?*
  Ik doe het even voor: begin bij 1, 1 + 2 dus 3, 1 + 2 + 3 dus 6, ... wie kan verder?
  Begin nu eens bij 2: 2 + 3 dus 5, 2 + 3 + 4 dus 9, ...

- *Jan heeft bierkaartjes meegebracht en legt:*



Net een driekant!
"Probeer eens om nog zo'n 'driekanten' te maken", zegt de juf, "en zoek eens uit hoeveel kaartjes je dan nodig hebt."
Jan legt: 3 - 6 - 10 - 15 ... kaartjes.
Aan het bord komen 'driehoeken' en 'driehoeksgetallen' die door de kinderen ontdekt worden: 3 - 6 - 10 - 15 - ...

"Zou dat met vierkanten ook gaan?" vraagt de juf.
De leerlingen gaan enthousiast aan de slag en vinden 'vierhoeksgetallen': 4 - 9 - 16 - ...

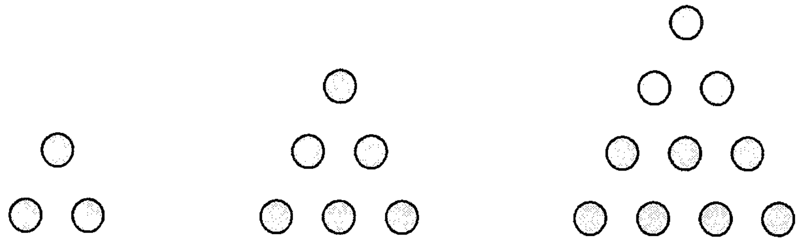
In een 6e leerjaar kan de volgende probleemstelling als denker eens meegegeven worden.
'Niemand heeft al kunnen bewijzen dat elk natuurlijk getal te schrijven is als de som van hoogstens drie driehoeksgetallen. Klopt het wel? Probeer met enkele getallen.'
5 = 3 + 1 + 1
13 = 10 + 3
25 = 10 + 15
19 = 15 + 6 + 3 ...
Een vierkantgetal is een getal dat je in de vorm van een vierkant kan leggen. Dit wordt in het secundair onderwijs een kwadraat genoemd.
Met twee opeenvolgende driehoeksgetallen kan je altijd een vierkantgetal maken.

- *Elk getal dat meer dan twee delers heeft kan je schrijven als een product van getallen met precies twee delers.*
  12 = 3 x 2 x 2
  48 = 2 x 3 x 2 x 2 x 2
  10 = 5 x 2
  Gaat dit altijd? Probeer met enkele getallen.

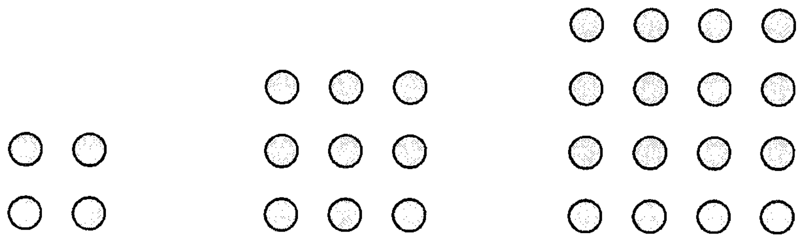
- *Saartje ontdekt dat de som van de cijfers van elk tafelproduct van 9 altijd 9 is. Zo bijvoorbeeld bij 6 x 9 = 54 is 5 + 4 = 9.*
  "Zou dat 'verder lopen', juf?" vraagt ze.
  De juf speelt de vraag naar de klas toe en laat de leerlingen proberen:
  11 x 9 = 99, 9 + 9 = 18 ! en 1 + 8 = 9
  12 x 9 = 108, 1 + 0 + 8 = 9
  13 x 9 = 117, 1 + 1 + 7 = 9
  18 x 9 = 162, 1 + 6 + 2 = 9
  Het gaat blijkbaar altijd, als je maar de som blijft maken. De ontdekking van Saartje kan de ganse klas motiveren om op zoek te gaan in andere tafels. Kijk maar eens naar de tafel van 3.

- *De oude Grieken waren dol op getalpatronen.*
  Zo kenden ze:

  - *driehoeksgetallen*

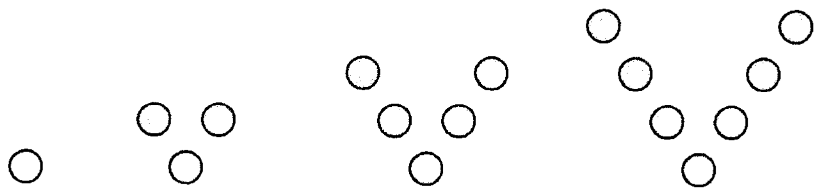


  - *vierkantsgetallen*



  - *rechthoeksgetallen*
    Het n-de rechthoeksgetal kan je bouwen met n x (n + 1) blokjes.

  - *V- patroon*



Wie durft het volgende aanpakken?

- *Kan je met een tekening aantonen dat de som van twee opeenvolgende driehoeksgetallen een vierkantgetal is?*

- *Het n-de driehoeksgetal is de som van alle natuurlijke getallen kleiner of gelijk aan n. De som van de eerste honderd getallen is dus het honderdste driehoeksgetal.*

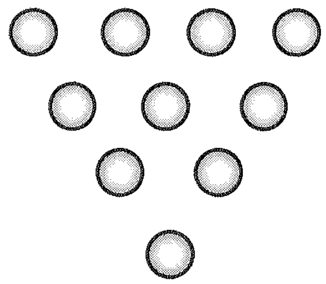
- *Kan je 98 in een V- patroon zetten?*

- *Elk natuurlijk getal kan je schrijven als de som van hoogstens drie driehoeksgetallen.*

- *In elk vierkantgetal ontdek je V-getallen.*

- *De rij van verschillen tussen opeenvolgende driehoeksgetallen levert de rij natuurlijke getallen op.*

- *Bij het kegelen staan de 10 kegels volgens een vast patroon opgesteld.*



Gaat het volgende patroon verder?
1 x1 = 1
11 x 11 = 121
111 x 111 = 12321
1111 x 1111 = 1234321
11111 x 11111 = 123454321
...
ENZENSBERGER, Hans Magnus,
<u>De telduivel.</u>
Amsterdam, De Bezige Bij, 1998
ISBN 90 234 8149 6

G40a

Vooraleer je een tabel kan interpreteren of zelf opstellen, moet je vlot tabellen kunnen lezen.
Dit is niet altijd even eenvoudig, omdat je vaak met veel gegevens moet rekening houden.

In de kleuterklas zijn de kinderen al vertrouwd geraakt met het gebruik van afbeeldingen. Een eenvoudige afbeelding wordt gebruikt als kenteken voor de kleuter, als aanduiding van de hoeken of de plaats van het materiaal. Afbeeldingen helpen de kleuter beter greep te krijgen op de indeling van de klas en de dagelijkse gang van zaken. Ze zijn bovendien een ondersteuning bij het kiezen en plannen, het zelfstandig werken en het opruimen.

Om afspraken te visualiseren gebruikt de kleuterleidster eenvoudige afbeeldingen waarmee ze een verbod of een verzoek geeft. Pictogrammen worden gebruikt als visueel geheugensteuntje om zich aan regels en afspraken te houden. Zo is een bepaalde hoek open of gesloten.

Het maximaal aantal toegelaten kleuters in die hoek kan je op verschillende manieren aanduiden.

- De kleuters hangen bij het binnenkomen van de hoek hun eigen kenteken aan de voorziene haakjes. Zijn alle haakjes vol, dan is ook de hoek vol en mag er niemand meer bij.
- Er hangen evenveel parelkransen in de hoek als er kinderen toegelaten zijn.

- Het aantal bolletjes op een kaart geeft aan hoeveel kleuters in de hoek mogen spelen.

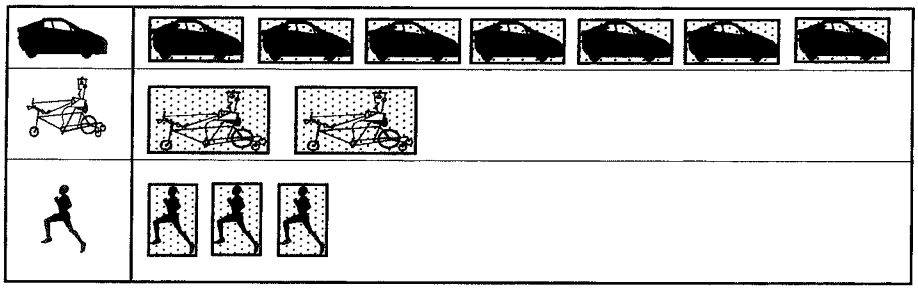
Het takenbord waarop een aantal dagtaken aangegeven zijn door middel van pictogrammen, onder meer planten water geven, boodschapper naar andere klassen, ... laat zien wie voor deze taken verantwoordelijk is. Deze borden vormen als het ware de voorbereiding op latere diagrammen en andere gevarieerde hoeveelheidsaanduidingen.

Soorten diagrammen

Beelddiagram

Bij een beelddiagram krijg je de informatie door het ordelijk rangschikken van figuurtjes (pictogrammen). Aanvankelijk stelt elk figuurtje een eenheid voor. Later ken je aan elk figuurtje een maat toe, zodat elk figuurtje voor een aantal eenheden staat.

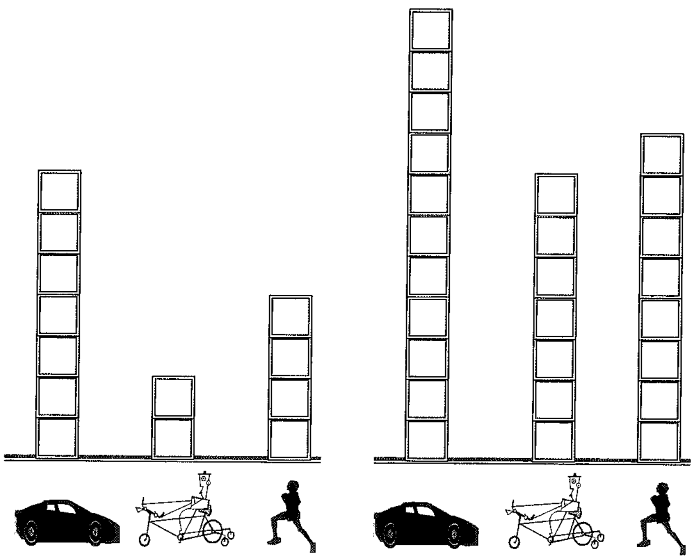
Bij een les over het verkeer geeft de juf aan iedereen een kaartje: kinderen die met de auto werden gebracht, krijgen een kaartje met een auto, kinderen die te voet zijn, krijgen een kaartje met een voetganger en kinderen die met de fiets kwamen, krijgen een kaartje met een fiets. De kinderen maken met de kaartjes een tabel aan het bord...
"De kaartjes moeten even groot zijn," zegt Jules.
"Waarom?", vraagt de juf.



Blokdiagram

Dit beelddiagram kan omgezet worden in een blokdiagram, waarin je het figuurtje vervangt door een blok. Ieder blokje stelt een eenheid voor. De blokken kun je zowel horizontaal als verticaal ordenen.

"Kijk goed. Ik maak met andere kaartjes een tabel van een andere klas, bijvoorbeeld van 4 C."



*"Welke verschillen zijn er tussen onze klas en klas 4 C?
Is klas 4 C 'sportiever'?"*

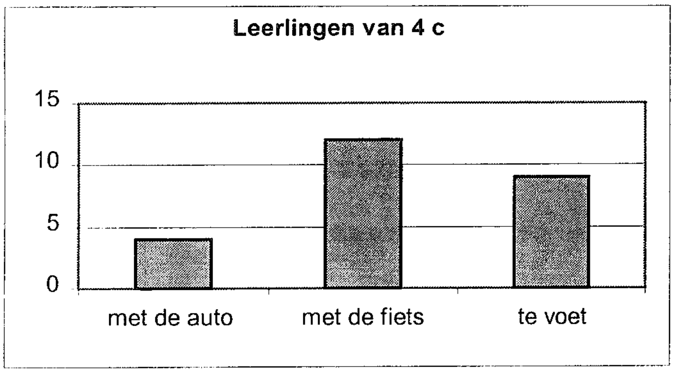
Staafdiagram

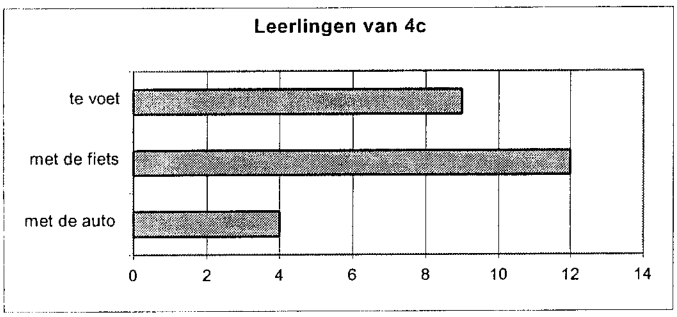
Door het aanbrengen van een eenvoudige schaalverdeling op één van de assen van het blokdiagram ontstaat een staafdiagram.
Het staafdiagram is een grafische voorstelling waarbij de hoogte (lengte) van de staven de frequentie, het aantal, aangeeft. In de staaf zijn de eenheden niet te onderscheiden. Voor het aflezen van de hoogte, kijk je naar de schaalverdeling op de as. De staven kan je los van elkaar of aan elkaar tekenen. Een staafdiagram kan je zowel horizontaal als verticaal tekenen. Een staafdiagram gebruik je bij niet doorlopende gegevens net zoals een lijndiagram.

Om aanhoudende gegevens - bijvoorbeeld de hoeveelheid neerslag - weer te geven, gebruik je een 'histogram'. De staven moeten in dit geval wel aansluiten aan elkaar en beslaan telkens de weergegeven deelperiode:

- een dag, als van elke dag van een maand de hoeveelheid neerslag wordt gegeven,
- een maand, als bijvoorbeeld van een heel jaar de maandelijkse hoeveelheid neerslag wordt voorgesteld.

Dit onderscheid is geen leerstof voor de lagere school.

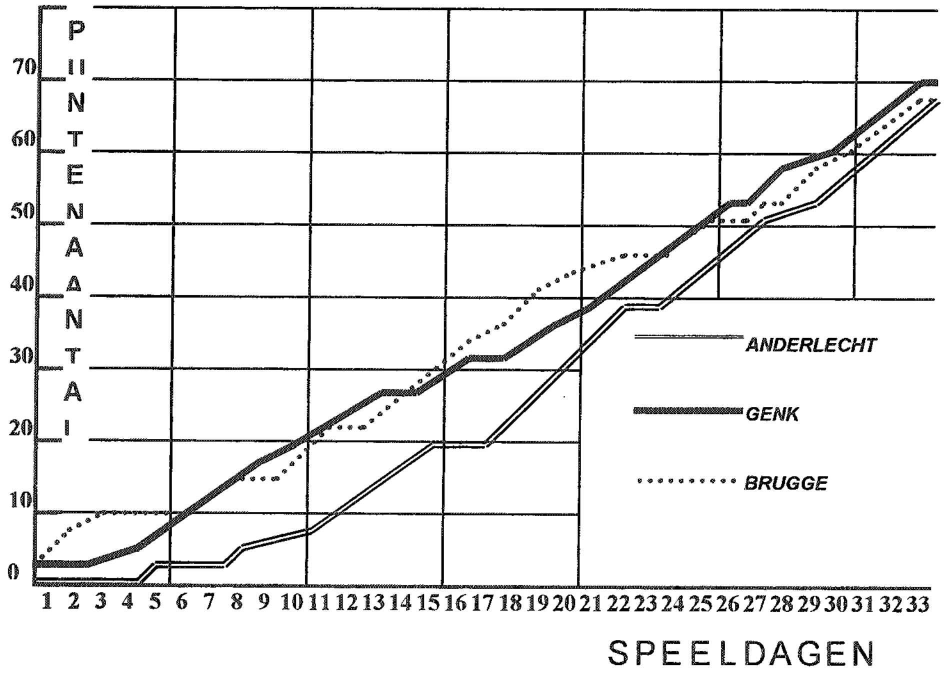




Lijndiagram

Je gebruikt een lijndiagram bij niet doorlopende, onderbroken onderzoeksgegevens. Het geeft een ontwikkeling weer.
Als je de middagtemperatuur van elke dag van de maand in een diagram wilt voorstellen, gebruik je een lijndiagram. De meetresultaten worden verbonden door een lijn. Deze lijn is een hulpmiddel om te laten zien welke punten bij elkaar horen. Je moet op de horizontale x-as en de verticale y-as kijken om de betekenis van de meetpunten te achterhalen

Lijngrafieken met verschillende lijnen zijn uitermate geschikt om te vergelijken.



Mogelijke vragen:

- *Over welke 3 voetbalploegen vertelt deze grafiek iets?*
- *Wat vergelijkt de journalist precies?*
- *Welke ploeg is zeer slecht gestart, maar toch sterk geëindigd?*
- *Hoeveel keer nam club Genk de leiding over van club Brugge?*
- *Zijn deze uitspraken juist?*

  Genk kan zondag in Harelbeke feestvieren als:

  Genk wint

  Genk gelijk speelt en Club Brugge niet wint

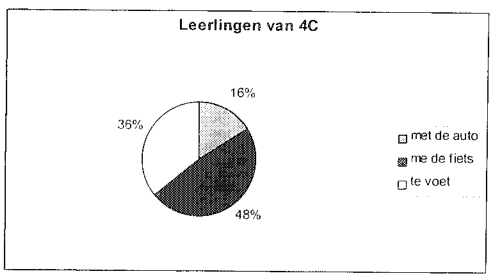
  Genk verliest en Club Brugge en Anderlecht niet winnen

  Club Brugge kan zondag in Westerlo feestvieren als:

  Club Brugge wint en Genk niet wint

Cirkeldiagram

Om een cirkeldiagram te maken verdeel je de cirkel in sectoren evenredig met de aandelen of percentages van de gegevens tot het geheel. Het lezen en interpreteren vergt kennis van en inzicht in de zestigdelige graden en het gebruik van de geodriehoek (indien de verdeling willekeurige hoeken bevat). Soms kunnen de verhoudingen met getallen of procenten worden weergegeven.
De volle hoek bestaat uit 4 rechte hoeken en meet 360°. De volle hoek komt overeen met 100%.
In eenvoudige gevallen zoals op onderstaande figuur, komt deze aanpak ook reeds bij breuken voor.



Soorten tabellen

Hoeveelheidsaanduidingen kunnen op verschillende manieren in tabellen verwerkt worden. Hoe de tabel er uitziet, wordt niet alleen door de cijfergegevens bepaald maar ook de nood aan overzichtelijkheid en het belang van de praktische gebruikswaarde.
Denk bijvoorbeeld aan de opbouw van uurtabellen van bus en trein. Het is een hele klus om deze goed te kunnen lezen en te interpreteren, laat staan om ze zelf op te stellen. Dat deze tabellen zo moeilijk zijn heeft veel te maken met de hoeveelheid gegevens die er verwerkt in zijn.

Enkelvoudige tabel

De enkelvoudige tabel toont een sterke overeenkomst met het beelddiagram waarbij de figuurtjes vervangen zijn door getallen.

Leerjaar	Aantal leerlingen
1	16
2	12
3	18
4	21
5	14
6	20
Jongste kleuters	9
Oudste kleuters	19
Totaal	129

Kruistabel

De kruistabel heeft zowel rij- als kolomopschriften, waarmee je rekening dient te houden. Van elke rij en/of kolom wordt een totaal gegeven naast het algemeen totaal.

Land	Hoofdstad	Opp. in 1 000 km²	Aantal inwoners in miljoenen	dichtheid
Albanië	Tirana	29	3,5	111
België	Brussel	30,5	10	328
Bulgarije	Sofia	111	8,5	81
Bosnië-Herzegovina	Sarajevo	51	3,7	87
Denemarken	Kopenhagen	43	5,2	119
Duitsland	Berlijn	357	81,2	218
Estland	Tallinn	45	1,5	35
Finland	Helsinki	337	5,0	15
Frankrijk	Parijs	544	57,4	103
Griekenland	Athene	132	10,3	76
Hongarije	Boedapest	93	10,3	110
Ierland	Dublin	69	3,5	50
IJsland	Reykjavik	103	0,26	2,4
Italië	Rome	301	57,0	191
Joegoslavië	Belgrado	102	10,4	101
Kroatië	Zagreb	56,4	4,5	83
Letland	Riga	63,7	2,6	42
Litouwen	Vilnius	65,2	3,7	57
Luxemburg	Luxemburg	2,5	0,38	146
Macedonië	Skopje	25,7	4,7	181
Moldavië	Chisinau	33,7	4,3	129
Nederland	Amsterdam	41	15,3	361
Noorwegen	Oslo	324	4,3	13
Oekraïne	Kiev	603,7	51,7	86
Oostenrijk	Wenen	84	8,0	91
Polen	Warschau	313	38,5	121
Portugal	Lissabon	92	9,8	111
Roemenië	Boekarest	238	22,7	98
Rusland	Moskou	17 075	147	9
Slowakije	Bratislava	49,0	5,3	108
Slovenië	Ljubljana	20,2	2,0	96
Spanje	Madrid	505	39,1	78
Tsjechië	Praag	78,8	10,3	130
Verenigd Koninkrijk	Londen	244	58,2	234
Wit-Rusland	Minsk	207	10,2	49
Zweden	Stockholm	450	8,7	19
Zwitserland	Bern	41	6,9	160

- *De tabel van de speciale toeristentreinen Brugge – Knokke lezen, is een goed begin om nadien ingewikkelder treintabellen te ontcijferen.*

Toeristentreinen	**rijden van 27 juni tot en met 30 augustus 1998 + Pinksteren: 30 mei tot en met 1 juni 1998** **Pasen 3, 4 en 5 april 1999; Hemelvaart: 13 mei tot en met 16 mei 1999; Pinksteren: 22 mei tot en met 24 mei 1999**

Brugge - Knokke

Brugge	V	9 06	10 06	11 06	12 06	13 06	14 06	15 06	16 06	17 06	18 06	19 06	20 06
Heist	A	9 18	10 18	11 18	12 18	13 18	14 18	15 18	16 18	17 18	18 18	19 18	20 18
Duinbergen	A	9 20	10 20	11 20	12 20	13 20	14 20	15 20	16 20	17 20	18 21	19 21	20 20
Knokke	A	9 23	10 23	11 23	12 23	13 23	14 23	15 23	16 23	17 23	18 23	19 23	20 23

Knokke - Brugge

Knokke	V	9 37	10 37	11 37	12 37	13 37	14 37	15 37	16 37	17 37	18 37	19 37	20 37
Duinbergen	A	9 40	10 40	11 40	12 40	13 40	14 40	15 40	16 40	17 40	18 40	19 40	20 40
Heist	A	9 42	10 42	11 42	12 42	13 42	14 42	15 42	16 42	17 42	18 42	19 42	20 42
Brugge	A	9 54	10 54	11 54	12 54	13 54	14 54	15 54	16 54	17 54	18 54	19 54	20 54

Om een meer doordeweekse treintabel te kunnen lezen, dien je vooraf eerst de gebruiksinfo en de betekenis van de conventionele tekens door te nemen, vooraleer je daaruit wijs raakt. Toch is dit een oefening die op het einde van de basisschool aan bod kan komen.

- *Een schoolreis plannen*

We willen met onze klas (21 leerlingen) op donderdag 24 juni op schoolreis. Wanneer kunnen we dan terecht in Océade?
Hoeveel kost dit per leerling?
Is de combinatie met Mini-Europa voordeliger dan beide attracties apart bezoeken? Hoeveel?
Hoe kunnen we Océade bereiken?

- *De eindstand van de eerste klasse- competitie lezen*
  Verwoede voetbalfans zullen zeker aan anderen deze tabel kunnen uitleggen. Laat leerlingen zelf eens vragen stellen bij de eindstand.

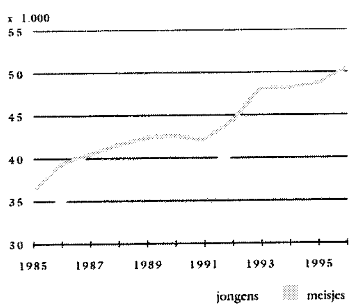
EINDSTAND EERSTE KLASSE - COMPETITIE 1998-99

		W	G	V	D	doelp. v t	ptn g	THUIS G	V	D	doelp. v t	ptn g v	UIT G	V	D	doelp. v t	ptn g v
1.	(1) RC Genk	34	22	5	7	74–38	73	14	1	2	44–16	44–7	8	4	5	30–22	29–22
2.	(2) Club Brugge	34	22	7	5	65–38	71	13	1	3	35–12	42–9	9	6	2	30–26	29–22
3.	(3) Anderlecht	34	21	6	7	76–39	70	11	2	4	37–16	37–14	10	4	3	39–23	33–18
4.	(4) Moeskroen	34	19	6	9	76–47	66	11	3	3	45–26	36–15	8	3	6	31–21	30–21
5.	(5) Lokeren	34	17	11	6	69–61	57	12	3	2	38–20	38–13	5	8	4	31–41	19–32
6.	(6) Standard	34	17	14	3	55–47	54	11	5	1	30–21	34–17	6	9	2	25–26	20–31
7.	(7) Lierse	34	16	12	6	72–47	54	12	3	2	49–17	38–13	4	9	4	23–30	16–35
8.	(9) AA Gent	34	14	10	10	55–59	52	8	3	6	29–22	30–21	6	7	4	26–37	22–29
9.	(8) St.–Truiden	34	14	11	9	52–46	51	9	3	5	31–14	32–19	5	8	4	21–32	19–32
10.	(10) Germinal Ek.	34	14	13	7	48–46	49	8	5	4	23–18	28–23	6	8	3	25–28	21–30
11.	(11) Harelbeke	34	10	13	11	44–46	41	5	6	6	24–28	21–30	5	7	5	20–18	20–31
12.	(12) Westerlo	34	11	16	7	56–62	40	7	5	5	35–26	26–25	4	11	2	21–36	14–37
13.	(13) E. Aalst	34	9	17	8	48–66	35	5	7	5	28–29	20–31	4	10	3	20–37	15–36
14.	(14) SC Charleroi	34	7	16	11	40–54	32	6	6	5	24–23	23–28	1	10	6	16–31	9–42
15.	(15) Beveren	34	8	20	6	33–60	30	5	10	2	18–32	17–34	3	10	4	15–28	13–38
16.	(16) Lommel	34	7	20	7	33–56	28	6	9	2	21–23	20–31	1	11	5	12–33	8–43
17.	(17) Kortrijk	34	6	21	7	49–81	25	5	8	4	31–41	19–32	1	13	3	18–40	6–45
18.	(18) Oostende	34	4	20	10	27–79	22	3	7	7	17–29	16–35	1	13	3	10–50	6–45

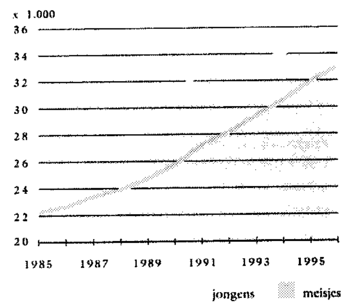
Diagrammen lezen

Bekijk de volgende grafiek met de bijbehorende vragen.

Studenten hogescholenonderwijs



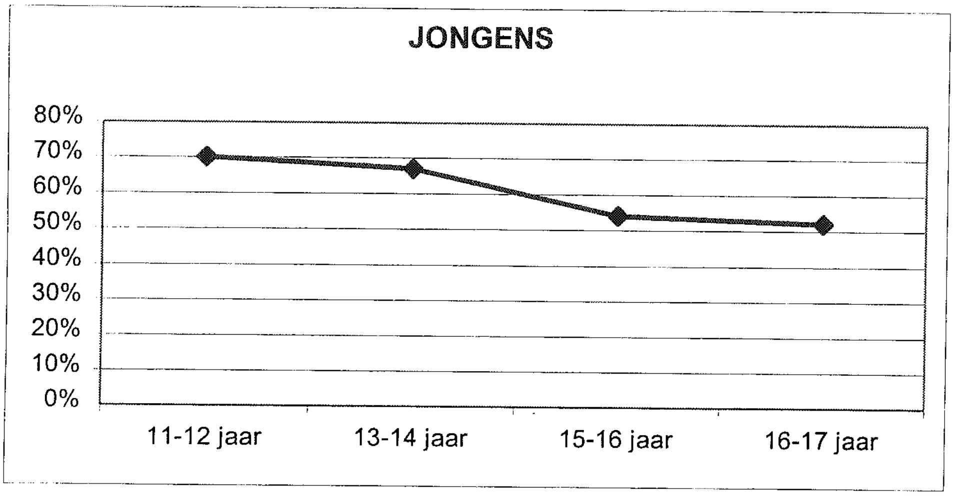
Studenten universiteit

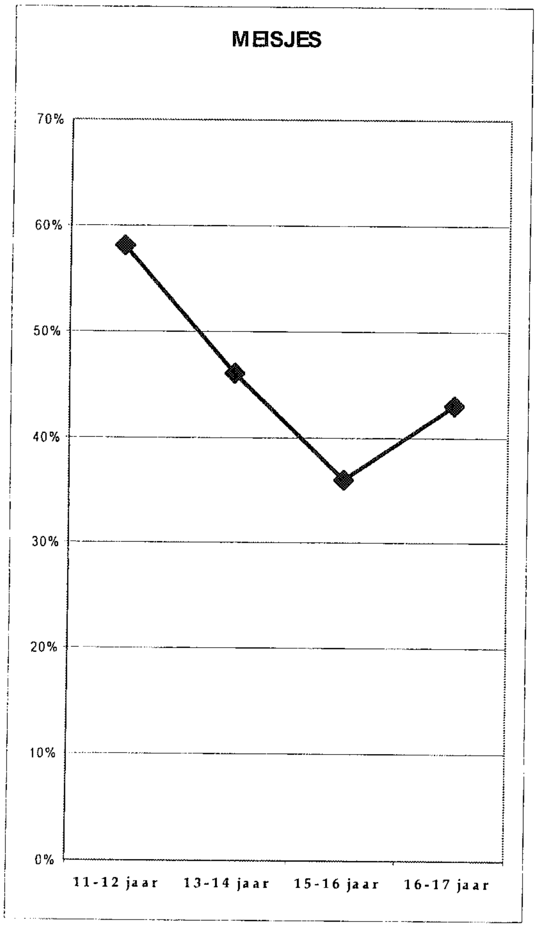


Wat kun je aflezen van beide grafieken.
Waar zitten nu de meeste studenten?
Als je 1995 neemt, studeren er dan in totaal meer jongens of meer meisjes verder na het middelbaar?
Geef een verklaring voor het verschil in aantal tussen jongens en meisjes.

Grafieken lezen en interpreteren is niet altijd eenvoudig. Bijna elke dag vind je in media als kranten, tijdschriften en televisie hoeveelheidsaanduidingen in de vorm van grafieken, tabellen en diagrammen. Het is belangrijk om met leerlingen enkele van die grafieken eens kritisch onder de loep te nemen. Zo is het mogelijk om met een grafische voorstelling van gegevens een 'valse' indruk te geven. Van groot belang is de keuze van de verhouding tussen de schaalverdelingen op de assen.

"Ik praat gemakkelijker over problemen met mijn vader."



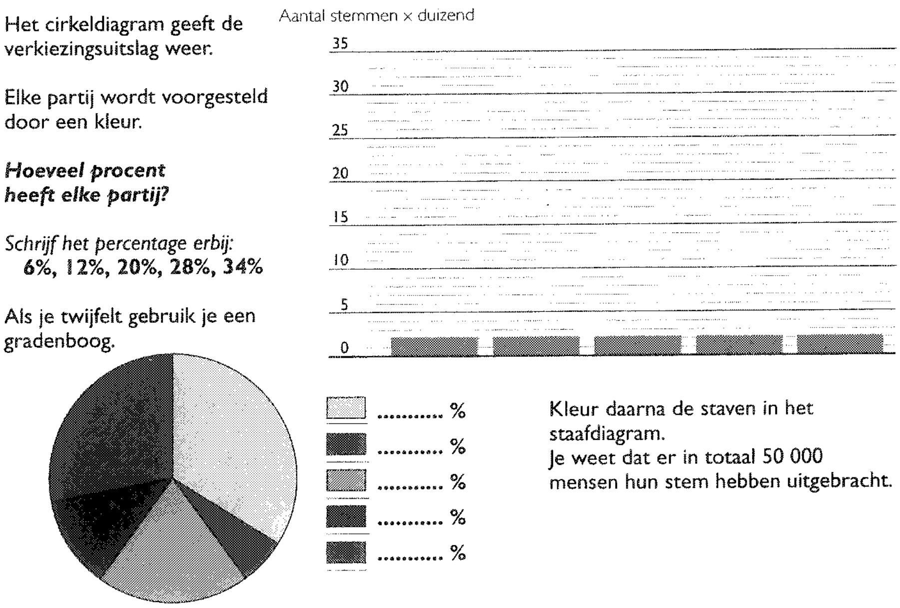


De daling bij de meisjes lijkt heel wat drastischer, wanneer de grafiek 'vervormd' is.

Zelf grafieken opstellen

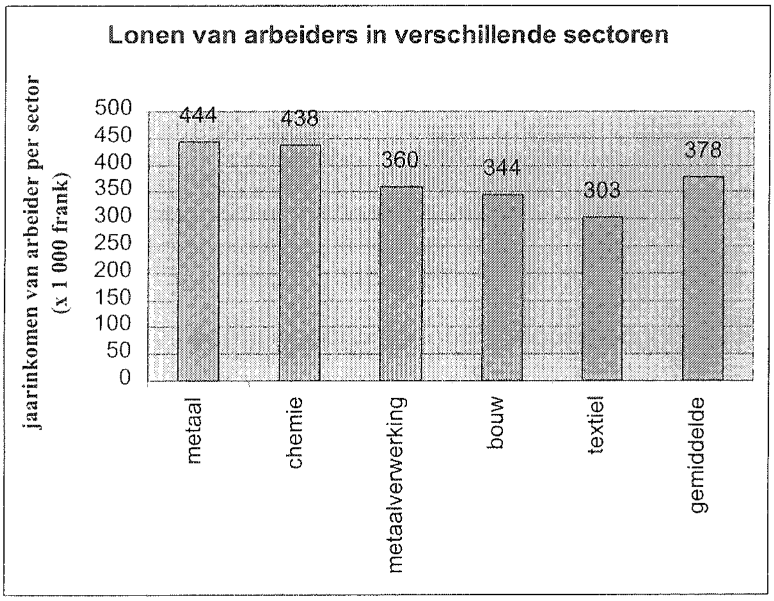
Zelf grafieken opstellen wordt een stuk moeilijker wanneer leerlingen moeten kiezen welk soort diagram ze nemen, hoe ze de gegevens het best grafisch voorstellen, welke opschriften ze kiezen, welke schaalverdeling ze aanbrengen op de assen, welke verhouding ze moeten nemen om de situatie zo 'waarheidsgetrouw' mogelijk weer te geven...

Om zelf grafieken te leren opstellen kunnen leerlingen eerst cirkeldiagrammen leren omzetten naar staafdiagrammen (en omgekeerd).



Uit: Zonneland, 1999, nr. 39, blz. 16

Dat is echter niet mogelijk met elk diagram. Van het volgende staafdiagram kan je onmogelijk een cirkeldiagram maken. Je kent niet het totaal van alle lonen, je beschikt niet over alle lonen, je weet niet met welk geheel of welke eenheid de weergegeven lonen dienen vergeleken te worden.



Tabellen, grafieken en diagrammen opstellen is zeer eenvoudig met sommige softwareprogramma's. Je kan je zelf verzamelde gegevens inbrengen en de verschillende voorstellingswijzen met elkaar vergelijken.

G41, G39

Verhoudingen vaststellen en vergelijken bij getallenkennis heeft te maken met verbanden en patronen tussen getallen zien.

- *"Vul de volgende reeks aan: 2 - 4 - 8 ..."*
  Om deze reeks voort te zetten moet je de verhouding tussen de getallen vaststellen.
- *Als je weet dat 4 x 2 = 8, dan kan je bijvoorbeeld 8 x 2 en 12 x 2 hieruit berekenen wanneer je de verhouding tussen de getallen 4, 8 en 12 ziet.*

B7d

- *Bij de oefening 480 : 16 is het handig als je weet dat je het deeltal en de deler verhoudingsgewijs kunt vergroten of verkleinen. Zo kan je deze oefening herleiden tot 120 : 4.*

B9c

- *De opdracht 40 x 4 200 is stapsgewijs te herleiden tot:*
  4 x 42 000   2 x 84 000   168 000
  Hierbij gebruik je de omgekeerde evenredigheid die bestaat tussen de factoren van een vermenigvuldiging en beschreven wordt in doel B9c.

B53, B54, B55
MR84, MR88, MR89

Er is een verband tussen verhoudingen in getallenkennis, in bewerkingen, en in meten en metend rekenen.

- *Met 1 pak bloem kan Theo 25 pannenkoeken bakken. Hij wil 75 pannenkoeken bakken.*
  Hoeveel pakken bloem heeft hij nodig?
- *De meeste kookboeken geven de hoeveelheden op voor 4 personen. Wat moet je voorzien als je iets wilt klaarmaken voor 12 personen?*
- *In de klas zijn 1/3 van de leerlingen jongens en 3/4 meisjes. Kan dat?*
- *De verhouding vaststellen en vergelijken tussen het aantal mensen dat een werk uitvoert en de tijd die dat werk vraagt.*

G42

Dit is de enige doelstelling in het leerplan wiskunde waar de dubbele lijn voorkomt. Het kind bouwt zijn kennis, inzichten, vaardigheden en attitudes over verschillende leerjaren op. De leerkracht zal in diverse situaties er op letten dat leerlingen de geleerde symbolen, terminologie, notatiewijzen en conventies in verband met getallen correct gebruiken.

Het '='-teken

Voor veel leerlingen in het eerste leerjaar functioneert het '='-teken enkel als een teken om een opdracht uit te voeren, de som of het verschil te berekenen en het antwoord achter het '='-teken te plaatsen ('='-teken als resultatief teken).

Meten en metend rekenen

Daarom zal de leerkracht het '='-teken aanbrengen als een teken dat in een vergelijking een gelijkwaardigheid uitdrukt (gelijkheidsrelatie). Confronteer leerlingen met opgaven met telkens twee getallen langs beide kanten van het gelijkheidsteken.

- $2 + 4 = 3 + .$
- $5 - 1 = 6 - .$

Leer leerlingen bewerkingen zien als vergelijkingen. Laat de leerlingen hiertoe eerst grootheden (gewichten, lengten, ...) vergelijken en daarna concrete hoeveelheden met materiaal of in tekeningen afgebeeld. Leerlingen stellen vast aan welke kant er meer zijn, of dat er aan beide kanten evenveel voorwerpen liggen. Voer daarbij de tekens '<', '>' en '=' in. Laat leerlingen een bestaande ongelijkheid omzetten in een gelijkheid of omgekeerd. Liggen er bijvoorbeeld links vier blokken en rechts zes, dan stellen ze eerst vast dat de hoeveelheid links kleiner is. Vervolgens gaan de leerlingen na hoeveel blokken ze aan die kleinere hoeveelheid moeten toevoegen om er een gelijkheid van te maken. Zo leren kinderen formules schrijven als $3 < 6$, $3 + 5 = 8$ en $3 = 8 - 5$. Je kan echter ook gelijk maken door van '6' iets af te halen.
Nog een andere manier is om bij '4' iets bij te doen en van '6' iets weg te halen.

Beperk het aantal formule-opgaven (vergelijkingen met vier termen, gewone en omgekeerde puntoefeningen) die sterk afwijken van de gewone rekenopgaven en die leerlingen in verwarring brengen.

Puntoefeningen

Bepaalde puntoefeningen zijn relatief gemakkelijk voor kinderen.

- *5 + . = 8*
- *13 = 10 + .*
- *7 - . = 4*
- *10 = 14 - .*

Zo'n oefeningen kunnen bij veel leerlingen het inzicht verdiepen in relaties tussen getallen en bewerkingen.

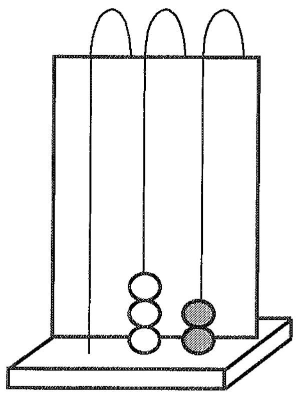
Andere puntoefeningen zijn dan weer erg moeilijk voor de meeste leerlingen. Ze zijn te vergelijken met grammaticale patronen en zijn te abstract.

- *. + 3 = 5*
- *5 = . + 3*
- *. - 3 = 5*
- *5 = . - 3*

Veel leerlingen vallen dan terug op 'rekentrucjes' om deze opgaven op te lossen.

ALFABETISCHE BEGRIPPENLIJST GETALLENKENNIS

Abacus



Aantal

hoeveelheid bestaande uit afzonderlijk telbare eenheden

Gestructureerd aantal: telbare hoeveelheid die mits een zekere ruimtelijke schikking of groepering vlugger naar aantal ingeschat kan worden.

Ongestructureerd aantal: telbare hoeveelheid die moeilijk vlug naar aantal kan ingeschat worden.

Abacisten

voorstanders van het Romeinse talstelsel

Additief of additioneel getallensysteem

zie getallensysteem

Algoritmici

voorstanders van het huidige positioneel getallensysteem

Akoestisch tellen

zie tellen

Beduidende cijfer

zie cijfer

Breuk

drukt een aantal delen uit van een grootheid die in gelijke delen is verdeeld

Notatie van een breuk: $\frac{T}{N}$ waarbij N de noemer is die het aantal gelijke delen uitdrukt waarin de grootheid is verdeeld, en T de teller die het aantal gelijke delen uitdrukt die je van die verdeling neemt.

De notatie T/N moeten de kinderen alleen kunnen lezen en herkennen als een breuk.

Referentiegeheel: het geheel waarvan je vertrekt wanneer je een breuk van iets neemt

Soorten breuken

Echte breuk: een breuk waarvan de teller kleiner is dan de noemer.

- *2/3*
- *4/9*

Gelijknamige breuken: breuken zijn gelijknamig als ze dezelfde noemer hebben

5/8 - 3/8 - 7/8

Gelijkwaardige breuken: breuken zijn gelijkwaardig als ze van eenzelfde grootheid hetzelfde deel uitdrukken.
2/3 = 4/6 = 8/12

Onechte breuk: de teller is groter of gelijk aan de noemer
5/3 - 6/5

Stambreuk: breuk met teller 1

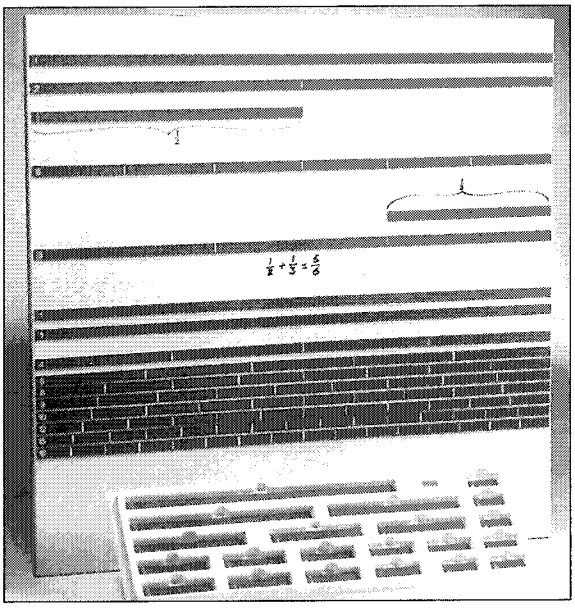
Breuken bewerken

Breuken compliceren: overgaan op een gelijkwaardige breuk waarvan de teller en de noemer grotere getallen zijn.

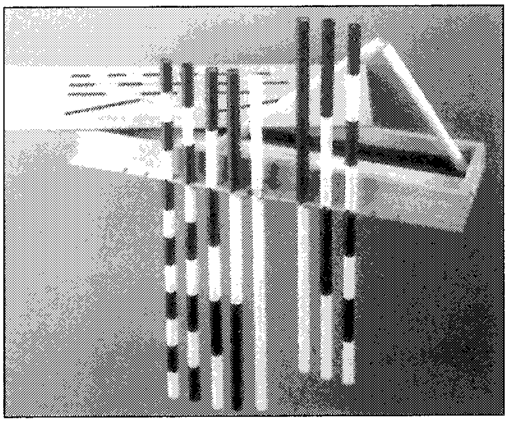
Breuken vereenvoudigen: overgaan op een gelijkwaardige breuk waarvan de teller en de noemer kleinere getallen zijn.

Breukenmateriaal

Breukenbord



Breukenstaafjes



Cijfer	één symbool dat een aantal voorstelt in een talstelsel *Tientallig stelsel*: beschikt over juist tien cijfers: 0, 1, 2, 3, ... 9, ook Arabische cijfers genoemd. *Romeins talstelsel*: gebruikt zeven letters: I, V, X, L, C, D en M *Beduidende cijfer*: een cijfer met waarde verschillend van nul.
Cirkeldiagram	zie toelichting G40
Compliceren	zie breuk
Continue grootheid	een samenhangend geheel zie ook hoeveelheid
Conventies	geheel van stilzwijgende aanvaarde, geijkte opvattingen die in wiskunde gebruikelijk zijn
Decimalen	zijn de cijfers na de komma (punt) in een kommagetal
Deelbaarheid	zie deler
Deler van een getal	een deler van een natuurlijk getal a is elk natuurlijk getal dat precies een geheel aantal keer in a gaat. *Gemeenschappelijke deler van getallen:* als een getal een deler is van elk die getallen, dan is het een gemeenschappelijke deler van die getallen *Grootste gemeenschappelijke deler van getallen:* is de grootste van de gemeenschappelijke delers van die getallen (afkorting: ggd) *Kenmerk van deelbaarheid:* een eigenschap die toelaat te zien of een getal deelbaar is door een zeker getal zonder de deling uit te voeren. *Onderling ondeelbaar:* twee getallen zijn onderling ondeelbaar als hun grootste gemeenschappelijke deler is 1
Doortellen	zie tellen
Flexibel	afhankelijk van de omstandigheden; zelf een doelmatige oplossingsmethode kiezen op basis van inzicht in de structuur van de getallen en in de eigenschappen van de bewerkingen
Formeel	op de vorm betrekking hebbend
Gelijkvormig	zie meetkunde
Gemeenschappelijke deler	zie deler

Gemeenschappelijk veelvoud — zie veelvoud

Gemengd getal — zie getal

Getal

symbolische weergave van een aantal, een hoeveelheid, een rangorde, een verhouding, een code
Een getal kun je benoemen, kun je schrijven met cijfers en andere symbolen, kun je voorstellen met bijvoorbeeld een getalbeeld.

Ezelsbruggetje: Wat een letter is voor een woord, is een cijfer voor een getal.

Soorten getallen

Even getal: een getal dat deelbaar is door twee

Gemengd getal: een natuurlijk getal gevolgd door een breuk

Kommagetal: getal waarbij een komma noodzakelijk is om de vereiste nauwkeurigheid te benaderen

Maatgetal: zie metend rekenen

Natuurlijk getal: getal dat je gebruikt voor het tellen van een aantal objecten

- als aanduiding voor een hoeveelheid: naam voor een telbare hoeveelheid
  (nul), één, twee, drie, vier, ...

- als aanduiding voor een rangorde (rangtelwoord): drukt een volgorde uit
  eerste, tweede, derde, ...

- als aanduiding voor een verhouding
  3 kan vier keer in 12 (verhouding tussen 3 en 12)

- in een bewerking
  3 + 4, 5 x 7
  2 keer 3

- als een code: het getal krijgt hier een afgesproken betekenis
  de getallen in de barcode (streepjescode) verwijzen naar de eigenschappen van het artikel

Negatief getal: een getal kleiner dan of gelijk aan nul

Geheel negatief getal: negatief getal waar de eenheid precies een aantal keer in kan

Oneven getal: getal niet deelbaar door twee

Priemgetal: natuurlijk getal met precies twee verschillende delers: één en zichzelf

Rationaal getal: een getal dat je weergeeft door middel van een breuk of een kommagetal; het gaat hier in feite om het resultaat van een deling

$7 : 8 = 7/8 = 0{,}875$

$4 : 3 = 4/3 = 1{,}333\ldots$

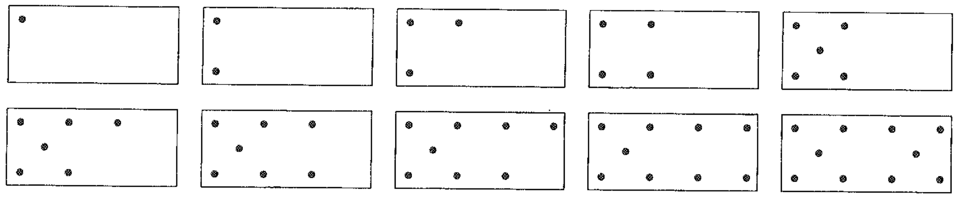
Voorbeelden van niet- rationale getallen:

π, $\sqrt{2}$

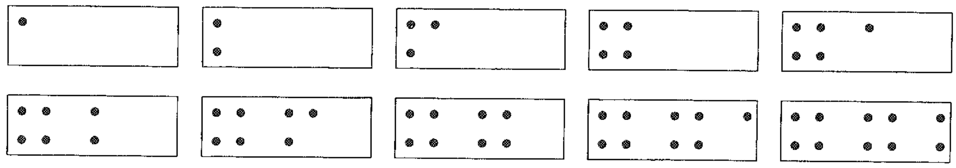
Getalbeeld

een voorstelling die het globaal herkennen ondersteunt

Getalbeelden gebaseerd op de vijfstructuur (Dominobeeld: zie blz. 79)

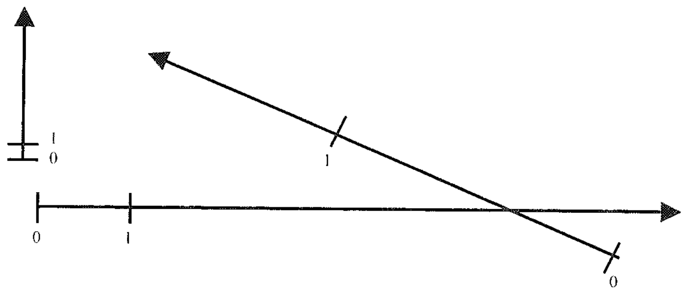


Kwadraatbeeld



Getallenas

een georiënteerde rechte lijn met een afgesproken ijk (dit is de afstand van 0 naar 1) waar de getallen een unieke plaats krijgen; de getallen worden dus orde- en verhoudingsgetrouw voorgesteld.



Lege getallenas: getallenas zonder onderverdelingen

Getallen afronden

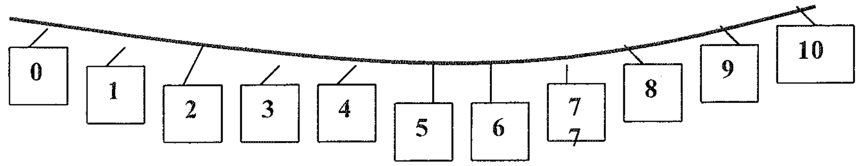
getallen benaderen door eenvoudiger getallen; zoals bij het bepalen van de relatieve grootte van getallen hangen deze afrondingen af van de situatie

Getallenbereik

het maximumgetal waarmee men binnen dat leerjaar werkt; voor elk leerjaar is het getallenbereik aangeduid (G11)

Getallenlijn

het op een lijn geordend naast elkaar plaatsen van een aantal opeenvolgende getallen



Grafiek
zie toelichting G40

Grootste gemeenschappelijke deler
zie deler

Getallensysteem
Additief of additioneel getallensysteem:
de getalwaarde die bij een zekere telbare hoeveelheid past, wordt bepaald door de som van de symbolen te maken die deze hoeveelheid voorstelt

Positioneel getallensysteem:
getallensysteem waarbij de getalwaarde die bij een symbool past afhangt van de plaats in de voorgestelde hoeveelheid

Gevarieerde hoeveelheidsaanduidingen
manieren om hoeveelheden schematisch op een overzichtelijke manier voor te stellen
een tabel, een diagram

Herhalingsoefening
oefening waarbij geziene leerstof nog eens behandeld wordt

(Her)structureren (een getal -)
het verdelen in delen die samen het getal vormen en omgekeerd (dikwijls wordt de term 'splitsen' gebruikt)
Herstructureren heeft te maken met de relatie zien tussen getallen, dit komt meestal overeen met 'splitsen'.
12 is 10 en 2
7 kan je verdelen in 3 en 3 en 1
12 is het dubbele is van 6
12 is de helft van 24
12 is 15 - 3
...

Graad van nauwkeurigheid
drukt uit hoe precies je rekenwerk moet zijn
Reken uit tot op 0,1 nauwkeurig. Reken dus eerste tot op twee cijfers na de komma en rond dan af tot op één cijfer na de komma.

Hoeveelheid
Telbare hoeveelheid: bestaat uit discontinue, apart telbare delen;
een hoeveelheid stiften, een aantal kastanjes

Niet-telbare hoeveelheid: bestaat uit een continue, niet in telbare delen splitsbare massa, is een gedeelte van iets: een stuk, een portie...
een hoeveelheid zand, een hoeveelheid klei (situeert zich meer in meten en metend rekenen)

Hoofdtelwoord
zie telwoord

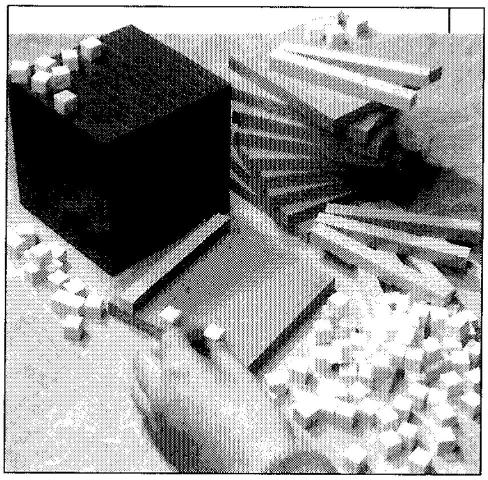
Kleinste gemeenschappelijk veelvoud
zie veelvoud

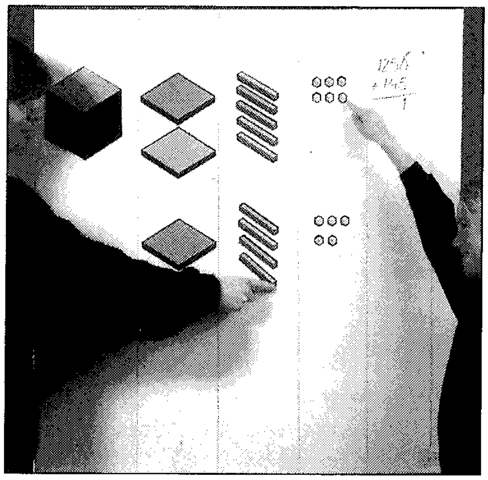
Kommagetal
zie getal

Lege getallenas
zie getallenas

Maatgetallen zie metend rekenen

MAB-materiaal Rekenblokken bestaande uit een kubusje, een staaf met tien onderverdelingen, een plak met honderd onderverdelingen en een grote kubus met 100 onderverdelingen op elk zijvlak; bestaat in verschillende basissen
MAB-materiaal basis 10





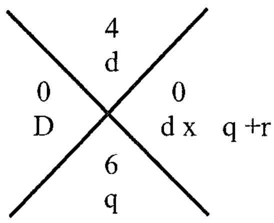
Materialiseren met materiaal voorstellen

Natuurlijk getal zie getal

Negatief getal zie getal

Negenproef

	7	5	6	3	1
-	6	2		2	4
	1	3	6		
-	1	2	4		
		1	2		



Noemer zie breuk

Onderling ondeelbaar zie deler

Oppervlaktemodel de grootheid is voorgesteld door een oppervlakte

Ordenen

Sorteren: een ordening gebaseerd op gelijkenissen
eenzelfde aantal bij eenzelfde aantal, soort bij soort, kwaliteit bij kwaliteit, kleur bij kleur, ... leggen

Seriëren: een ordening gebaseerd op verschillen
rangschikken van minder naar meer, van groot naar klein, van lichte naar donkere kleur, ... of omgekeerd

Paraat kennen	onmiddellijk weten en direct kunnen reproduceren
Patroon	een kenmerk dat zich steeds opnieuw herhaalt. Dit kenmerk kan onder meer slaan op kwalitatieve kenmerken als kleur of vorm, maar kan je ook in een gestructureerde hoeveelheid herkennen.
Percent	het percent is een andere schrijfwijze voor een breuk met noemer honderd. Het is een honderdste deel. Het percentage geeft aan hoeveel honderdsten van een geheel je neemt. Je spreekt ook over 'ten honderd'. Het is een manier om een verhouding voor te stellen.
Positioneel getallensysteem	zie getallensysteem
Priemgetal	zie getal
Procent	zie percent
Rangorde	duidt de plaats van een getal in de rij aan *eerste, laatste, middelste, vorige, derde, ...*
Rangtelwoord	zie natuurlijk getal
Rationaal getal	zie getal
Referentiegeheel	zie breuk
Relatieve grootte van getallen inschatten	naast de absolute grootte die slaat op de hoeveelheid en die onveranderd blijft, verwijst de relatieve grootte naar de situatie waarin het getal gebruikt wordt
Resultatief tellen	zie tellen
Seriëren	zie ordenen
Sorteren	zie ordenen
Staafdiagram	zie toelichting G40
Stambreuk	zie breuk
Strookmodel	je stelt de grootheid voor door een smalle strook waarin je de verdelingslijnen verticaal (of horizontaal) aanbrengt; die eenheidsstrook hoeft niet exact één meter lang te zijn; tenzij je kiest om het verband te leggen met de lengtematen
Structureren (een hoeveelheid -)	een ordening aanbrengen in een hoeveelheid om die beter te kunnen overzien
Symbool	wiskundig teken dat een wiskundig begrip voorstelt of een wiskundige bewerking aanduidt; letter of lettergroep die een grootheid of een eenheid voorstelt
Synchroon tellen	zie tellen
Tabel	zie toelichting G40

Talstelsel — geheel van afspraken binnen een systeem waarmee aantallen worden voorgesteld

tientalligheid:
verwijst naar de groeperingen per tien waarmee getallen in ons talstelsel worden voorgesteld

plaatswaardesysteem (of positiestelsel):
systeem waarin de symbolen (cijfers) een waarde krijgen naargelang van hun plaats in het getal

additief stelsel:
systeem waarin de waarden van de symbolen (cijfers) worden samengeteld

Tellen

Akoestisch tellen:
de telrij hardop zeggen, zonder koppeling aan een telbare hoeveelheid

Doortellen:
bij een zeker getal beginnen tellen

Resultatief tellen:
na het synchroon tellen, begrijpen en aangeven dat het laatst uitgesproken getal slaat op de hele hoeveelheid

Synchroon tellen:
terwijl je telt, een één-één-verbinding leggen tussen de voorwerpen die je wilt tellen en de rij telwoorden (ook simultaan tellen genoemd)

Terugtellen:
van een groter naar een kleiner getal tellen

Teller — zie breuk

Telwoord — woord dat refereert aan een getal

Term — in strikt wiskundige betekenis: een getal in een optelling of een aftrekking

Terugtellen — zie tellen

Veelvoud — als je een getal een geheel aantal keer neemt, dan heb je een veelvoud van dat getal

Gemeenschappelijk veelvoud van getallen:
als een getal een veelvoud is van elk van die getallen dan is het een gemeenschappelijk veelvoud van die getallen

Kleinste gemeenschappelijk veelvoud van twee getallen:
is het kleinste van de gemeenschappelijke veelvouden, verschillend van nul, van die getallen (afkorting: kgv)

Verbredingsoefening — oefening waarbij de geziene leerstof verbreed wordt naar andere toepassingsgebieden

Verdiepingsoefening — oefening waarbij de geziene leerstof uitgediept wordt

Vereenvoudigen — zie breuk

Verhoudingstabel — tabel waarbij getallen verhoudingsgewijs worden genoteerd.

aantal kg	4	2	.	6
prijs in euro	8	4	2	.

Verrijkingsactiviteit

activiteit waardoor de leerlingen beter inzicht krijgen in de leerstof en die hen de gelegenheid biedt in allerlei situaties het geleerde gevarieerd en spontaan toe te passen